

КОШЕРБАЕВА АЙКЕН БАКЫТЖАНОВНА

**N ($N > 2$) планеталы массалары әртүрлі жылдамдықпен
өзгертін көп дене мәселесі**

8D05403 – Механика

Философия докторы (PhD) дәрежесіне
ізденуге диссертация

Ғылыми кеңесшілер:
физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор Минглибаев М. Дж.

физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор Чичурин А. В.
(Иоанн Павл II атындағы Люблин
Католик Университеті,
Люблин қ., Польша)

Мазмұны

АНЫҚТАМАЛАР	4
БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР	5
КІРІСПЕ	7
1 ОРБИТА ЭВОЛЮЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ ЖҰМЫСТАРЫНА ШОЛУ	16
1.1 Тұрақты массалы көп дене мәселесін зерттеу жұмыстарына шолу	16
1.2 Айнымалы массалы көп дене мәселесін зерттеу жұмыстарына шолу	17
2 ЭКЗОПЛАНЕТА ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ҚАЗІРГІ ЖАҒДАЙЫ	23
2.1 Экзопланета ұғымы және оның жіктелуі	23
2.2 Жұлдыз ұғымы және оның жіктелуі	29
2.3 Экзопланета жүйелері ұғымы	30
3 АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІ	35
3.1 Абсолютті координаталар жүйесіндегі көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеуі	35
3.2 Салыстырмалы координаталар жүйесіндегі көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеуі	36
3.3 Квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыс негізіндегі ұйытқу теориясы	39
3.4 Квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыстың оскуляция элементтері арқылы жазылған қозғалыс теңдеуі	40
3.5 Пуанкаре айнымалыларының екінші жүйесінің оскуляция аналогтары арқылы жазылған қозғалыс теңдеуі	43
4 АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНДЕГІ ҰЙЫТҚЫТУШЫ ФУНКЦИЯНЫ ҚАТАРҒА ЖІКТЕУ	46
4.1 Квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыстың оскуляция элементтері арқылы ұйытқытушы функцияны қатарға жіктеудің жалпы сұлбасы	46
4.2 Ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігін қатарға жіктеу алгоритмі	47
4.3 Ұйытқытушы функцияның ғасырлық бөлігі	53
5 ПУАНКАРЕНІҢ ЕКІНШІ ЖҮЙЕСІНІҢ ОСКУЛЯЦИЯ АНАЛОГТАРЫ АРҚЫЛЫ ЖАЗЫЛҒАН АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНІҢ ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРІ	57
5.1 Эволюциялық теңдеулер	57

5.2	Эволюциялық теңдеулерді өлшемсіз шамаға келтіру.....	57
6	ЭКЗОПЛАНЕТА ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ЭВОЛЮЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ	63
6.1	K2-3 экзопланета жүйесі.....	63
6.2	Үш планеталы төрт дене мәселесі үшін өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесі... ..	66
6.3	Үш планета жағдайында орбитальді элементтер аналогтарын талдау ...	67
6.4	<i>Trappist-1</i> экзопланета жүйесі.....	73
6.5	Жеті планеталы сегіз дене мәселесі үшін өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесі	77
6.6	Жеті планета жағдайында орбитальді элементтер аналогтарын талдау .	79
6.7	<i>TOI-1338</i> қос жұлдызды екі планеталы (2+2) жүйе орбитальді элементтер аналогтарын талдау.....	84
	ҚОРЫТЫНДЫ.....	97
	ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ	99

АНЫҚТАМАЛАР

Диссертация жұмысында келесі терминдерге сәйкес анықтамалар қолданылған:

Бейстационар денелер – келесі сипаттаманың кемінде біреуі орынды болатын аспан денелері: массасы айнымалы, пішіні уақыт өте келе өзгеріске ұшырайды, бөлшектері біркелкі таралмайған денелер.

Жетім планета – ешқандай жұлдызға байланбаған, галактиканың центрін айнала қозғалыс жасайтын еркін планета.

Канондық ұйытқу теориясы – бейстационар денелердің квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалысын канондық айнымалылар аналогтары арқылы алуға мүмкіндік беретін ұйытқу теориясы.

Құс жолы – бұл аспанды өте қараңғы және жарық түндерде кесіп өтетін жұлдыздардың тығыз ағыны.

Массаның изотропты өзгерісі – ішкі реактивті күштердің қосындысы нөлге тең болатын массаның өзгеру түрі.

Мұхитты планета – сұйық сумен толықтай немесе жартылай қамтылған планета.

Орбита элементтерінің аналогтары – ұйытқыған қозғалыс жағдайында Кеплер элементтеріне ұқсас параметрлер.

Пульсар – бұл жарылыстан кейін пайда болған, жылдам айналатын жұлдыз.

Супержер планетасы – $10 M_{\oplus}$ массасына дейінгі массаға ие планета.

Ыстық Нептун – $10 M_{\oplus}$ -нан $20 M_{\oplus}$ -ға дейінгі массаға ие, Нептун немесе Уран тәріздес планета.

Хтоникалық планета – өздерінің жұлдыздарына өте жақын орналасқан, жартастар мен лавалары көп планета.

Экзопланета – Күн жүйесінің сыртында орналасқан массасы планета массасына тең аспан денесі.

Экзопланета жүйесі – орталық бір немесе қос жұлдызды айнала қозғалыс жасайтын кемінде бір планетасы бар Күн жүйесінің сыртында орналасқан жүйе.

БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР

a_i	- үлкен жарты өстің аналогы;
a_i^*	- өлшемсіз арақашықтық бірлігі;
$A_0^{ij}, A_1^{ij}, B_0^{ij}, B_1^{ij}, B_2^{ij}, C_0^{ij}, C_1^{ij}, C_2^{ij}, C_3^{ij}$	- Лаплас коэффициенттері;
a_1	- P_1 планетасының үлкен жарты өсі;
E_i	- эксцентриситеттік аномалия аналогы;
e_i	- эксцентриситеттің аналогы;
$\vec{F}_i$	- ұйытқытушы күш;
f	- гравитациялық тұрақты;
i_i	- орбита көлбеулігінің аналогы. орбита жазықтығының кескін (тірек) жазықтығына (картинная плоскость) көлбеу бұрышы;
M_i	- орташа аномалия аналогы;
m_i	- P_i планетасының массасы;
m_i^*	- өлшемсіз масса;
m_0	- S денесінің (орталық жұлдыз) массасы;
m_1	- бірінші дененің массасы;
m_2	- екінші дененің массасы;
$M_\odot$	- Күн массасы $(1.98847 \pm 0,00007) \cdot 10^{30}$. Масса бірлігі ретінде алынған. Астрономияда жұлдыздар мен басқа да аспан денелерінің массасын өлшеуге қолданылады;
$M_\oplus$	- Жер массасы;
N	- планета саны;
n, n_1, n_2, n_3	- планеталардың массалар заңдылығының көрсеткіші;
n_0	- орталық жұлдыздың массалар заңдылығының көрсеткіші;
n_i	- орташа қозғалыстың аналогы;
$Oxyz$	- абсолютті координаталар жүйесі;
P_i	- i -ші планета;
$\vec{R}_i$	- абсолютті координаталар жүйесінің бастапқы нүктесінен басталған i -ші сфералық дененің радиус – векторлары;
R_i^*	- Гамильтон функциясы;
$\vec{R}_{ij}$	- абсолютті координаталар жүйесінде i -ші және j -ші сфералық дене центрлерінің өзара арақашықтығы;
$\dot{\vec{R}}_i$	- бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің тасымал жылдамдығы;

$\vec{R}_0$	- абсолютті координаталар жүйесіндегі орталық жұлдыздың радиус-векторы;
$\vec{r}_i$	- салыстырмалы координаталар центрінен басталған P_i денесінің радиус-векторы;
$\vec{r}_{12}$	- екі сфералық дене центрлерінің арасындағы ара-қашықтық;
$R_\odot$	- Күн радиусы;
$R_\oplus$	- Жер радиусы;
S	- центрлік дене, орталық жұлдыз;
$Sx'y'z'$	- салыстырмалы координаталар жүйесі;
t_0	- бастапқы уақыт моменті;
t^*	- өлшемсіз уақыт;
T_1	- бастапқы уақыт моментіндегі P_1 планетаның периоды.
u_i	- ендік аргументінің аналогы;
$\vec{u}_i$	- бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің абсолютті жылдамдығы;
$\vec{V}_i$	- бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің салыстырмалы жылдамдығы;
W_i	- ұйытқытушы функция;
W_{gi}	- Бүкіл әлемдік тартылыс заңдылығынан пайда болатын ұйытқытушы функция;
$W_{gi,main}$	- ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігі;
$W_{gi,add}$	- ұйытқытушы функцияның қосымша бөлігі;
W_{ci}	- интегралдау үшін қосылған модельдік ұйытқытушы функция;
ω_i	- перицентр аргументінің аналогы;
ω_1	- P_1 планетасының жиілігі;
θ_i	- нақты аномалияның аналогы;
Ω_i	- түйіндер сызығы бойлығының аналогы;
μ_{i0}	- гравитациялық параметр;
$\phi_i(\tau_i)$	- перицентрден өту уақытының аналогы;
τ_i	- перицентрден өту уақыты;
$\gamma = \gamma(t)$	- массалар арқылы берілген функция;
$\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i$	- Пуанкаре екінші жүйесі айнымалыларының аналогтары;
λ_i	- орташа бойлық;
Δ_{ij}	- салыстырмалы координаталар жүйесінде i -ші және j -ші денелердің арақашықтығы;

КІРІСПЕ

Жұмыстың жалпы сипаттамасы. Масса өзгерісінің кез-келген заңдылығы үшін Гюльден-Мещерский мәселесінің жалпы шешімі жоқ болғандықтан, айнымалы массалы планета жүйесінің динамикасы канондық ұйытқу теориясының әдістерімен зерттелді. Бейстационар планета жүйесінің массаларының уақыт бойынша өзгерісі осы жүйенің динамикалық эволюциясына әсерін зерттеудің негізі академик Т. Б. Омаровтың [1], [2], [3] еңбектерінде жатыр. Осы идеяны Т. Б. Омаровтың шәкірті М. Дж. Минглибаев өз еңбектерінде [4], [5] дамытты. М. Дж. Минглибаев бейстационар денелерді зерттеу үшін арнайы канондық ұйытқу теориясын жасады [6]. Ол ұйытқыған қозғалыстың үлкен тобын ашты: квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыс негізінде ұйытқу теориясы әртүрлі оскуляция элементтерінің жүйесінде әртүрлі формада құрылды. Т.Б. Омаров жасаған конустық қима бойынша апериодтық қозғалыс негізіндегі ұйытқу теориясы М. Дж. Минглибаев жасаған квазиконустық қима бойынша апериодты қозғалыс негізіндегі ұйытқу теориясының дербес жағдайы болып табылады. Канондық ұйытқу теориясы – бейстационар денелердің квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалысын канондық айнымалылар аналогтары арқылы алуға мүмкіндік беретін ұйытқу теориясы.

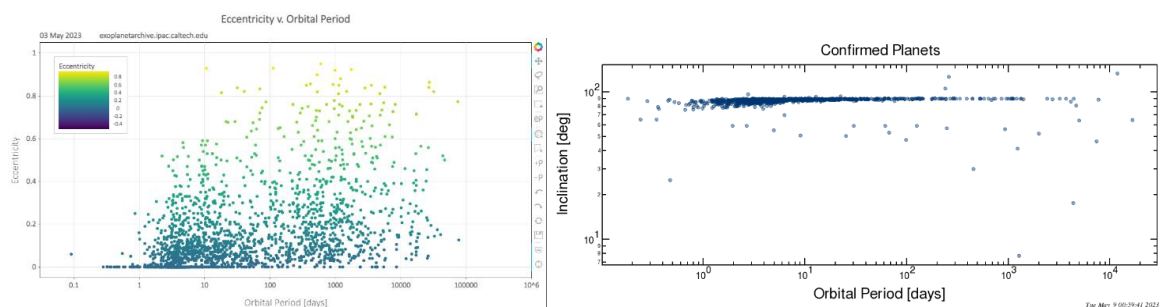
Канондық ұйытқу теориясын пайдалану арқылы массалары изотропты түрде өзгертін үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқуы [7], [8] жұмыстарында зерттелді және массалар жылдамдығы өзгеруінің үш жағдайы (а. үш дененің де массасы бірдей қарқында өзгертін жағдай; ә. екі дене жылдамдығы бірдей қарқында, ал үшінші дене жылдамдығы басқа қарқында өзгертін жағдай; б. үш дененің жылдамдығы әр түрлі қарқында өзгертін жағдай) зерттелінді. Осы жұмыстар нәтижесінде, массалар айнымалы болған жағдайда Лаплас жазықтығы сақталмайтындығы белгілі болды. Тұрақты масса кезінде жарқырау түйіні мен перицентрдің өзгеру жылдамдығы тұрақты болса, масса айнымалы кезде айнымалы болатындығы анықталды. Массалары әр түрлі қарқында өзгертін үш дене мәселесінде көлбеулік бойынша жүйенің орнықтылығы туралы Лаплас теоремасы, классикалық үш дене мәселесіндегідей, орынды екендігі белгілі болды. Массалары әр түрлі қарқында өзгертін жағдайда Якоби теоремасы орындалмайды.

Бейстационар экзопланета жүйесінің динамикалық эволюциясы ұйытқу теориясын пайдалану арқылы [9], [10] жұмыстарда зерттелінді. Осы жұмыстарда массалары анизотропты түрде өзгертін үш дене мәселесі қарастырылды.

Төрт дене мәселесінен бастап көп дене мәселесінің ($N \geq 3$) масса тұрақты жағдайда жуық шешімдері бар, алайда масса айнымалы жағдайда бір де бір интегралы белгілі емес. Сол себепті, массалары әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгертін $N+1$ дене мәселесінің ғасырлық ұйытқыған қозғалысы зерттеледі. [11], [12] мақалаларында канондық ұйытқу теориясын пайдаланылып айнымалы массалы көп дене мәселесін зерттеу бастау алды.

Бұл жұмыста салыстырмалы координаталар жүйесінде Ньютон заңы бойынша өзара әсерлесетін айнымалы массалы сфералық симметриялы N планеталы көп дене мәселесі қарастырылған. Денелердің массалары кез-келген берілген заңдылықпен изотропты түрде әртүрлі қарқында өзгереді және орталық жұлдыздың массасы планеталардың массаларынан әлде-қайда үлкен деп болжам жасалған. Эволюция барысында планеталар бір-бірімен қиылыспайтын квазиэллипстік орбита бойымен қозғалыс жасайды. Массалар айнымалы болғандықтан дифференциалды қозғалыс теңдеулері автономды емес түрге енді және есеп әлде-қайда күрделенді. Масса өзгерісінің кез-келген заңдылығы үшін Гюльден-Мещерский мәселесінің жалпы шешімі жоқ болғандықтан, айнымалы массалы планета жүйесінің динамикасы канондық ұйытқу теориясының әдістерімен зерттелді.

1-суретте «NASA экзопланеталар архив» сайтынан алынған деректерден эксцентриситеттері белгілі экзопланеталардың эксцентриситет шамасы бойынша таралу гистограммасы келтірілген [13]. Гистограммада эксцентриситеті үлкен $0.5 < e < 1$ экзопланеталар аз екендігі көрініп тұр, эксцентриситеттері белгілі экзопланеталардың шамамен 87%-ының эксцентриситеті $0 \leq e < 0.1$ диапазонындағы мәндерге ие екендігі белгілі. Экзопланеталарды анықтаудың кеңінен қолданылатын әдістері сәуле жылдамдық әдісі және транзит әдісі болып табылады, ал осы әдістер $i = 90^\circ$ маңайындағы экзопланеталарды анықтауға икемделген. $i = 90^\circ$ құратын жазықтықты негізгі жазықтық деп қарастырсақ, көлбеулігі нөлге жуық орбитамен қозғалыс жасайтын экзопланеталар өте көп (1 сурет). Сондықтан да, канондық қозғалыс теңдеуі Пуанкаре екінші жүйесінің аналогтары арқылы алынды. Бұл канондық теңдеулер негізгі жазықтық маңайында кіші эксцентриситетпен қозғалыс жасайтын аспан денелерінің динамикалық эволюциясын жақсы сипаттайды.



1 сурет – Эксцентриситет және көлбеулік шамалары бойынша экзопланеталардың таралуы. Диаграмма NASA экзопланета мұрағаты порталында құрылды [14]

Ұйытқытушы функцияны канондық элементтер арқылы өрнектеу үшін, *Wolfram Mathematica* символдық жүйесі көмегімен ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігі кіші параметрлердің (көлбеулік аналогы және эксцентриситет аналогы) екінші дәрежесі бойынша қатарға жіктелді. Уақыттың үлкен

интервалында планеталардың орбита параметрлерінің өзгерісін анықтауға мүмкіндік беретін ғасырлық теңдеулер жүйесі аналитикалық түрде алынды. Ғасырлық теңдеулер жүйесі сызықты автономды емес $4N$ теңдеуден тұрады және орбита пішінін сипаттайтын және орбита жазықтығының кеңістікте орналасуын сипаттайтын екі жүйеден тұрады. Кез-келген массаның өзгеру заңдылығы үшін, N планеталы кез-келген жүйе үшін өлшемсіз ғасырлық теңдеулер жүйесі алынды. Айнымалы массалы төрт дене мәселесі үшін және сегіз дене мәселесі үшін өлшемсіз ғасырлық теңдеулер жүйесі айқын түрде ашылып жазылды. Бұл жұмыста экзопланета жүйелерінің динамикалық эволюциясына аспан денелері массаларының айнымалылығы қалай әсер ететіндігі зерттелді. Басқаша айтқанда, масса айнымалы жағдайда орбита элементтерінің өзгерісі зерттелді және тұрақты масса жағдайынан өзгешелігі талданды.

Зерттеу тақырыбының өзектілігі: Классикалық механикада көп дене мәселесі масса тұрақты жағдайда зерттелінеді, алайда экзопланета жүйелерінің ашылуы және зерттелуі, аспан денелерінің бейстационар екендігін көрсетіп отыр. Аспан механикасында бейстационар есептерді зерттеу массаның айнымалылығын ескеру қажеттігін туғызды. Осы себептен, айнымалы массалы көп дене мәселесін зерттеу аспан механикасында өзекті мәселе.

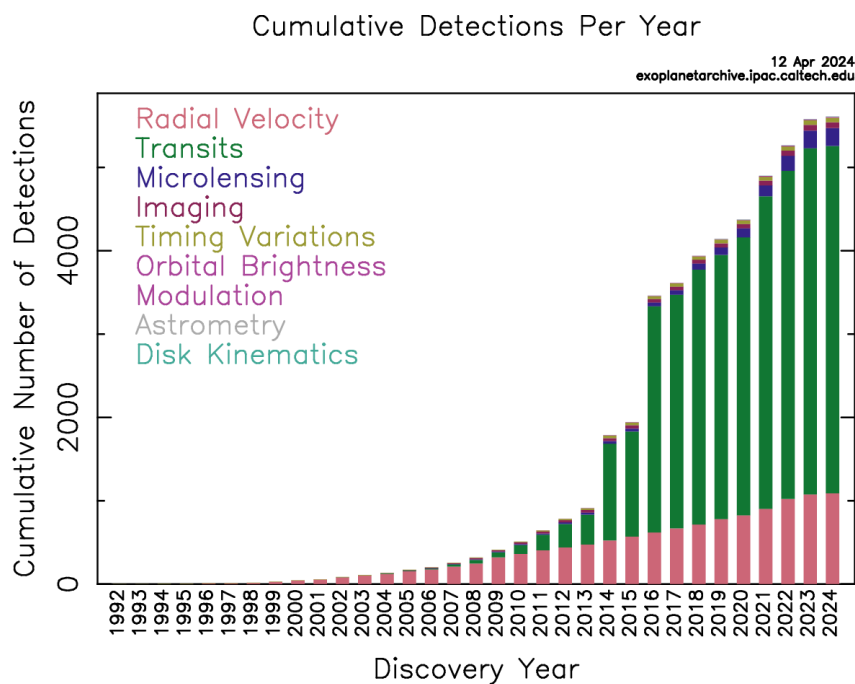
1995 жылдан бері қазіргі күнге дейін жалпы саны 4 мыңнан артық экзопланета жүйесі бар және 6 мыңға жуық экзопланета тіркелген (2 сурет). Бұдан бөлек, экзопланета ретінде танылуға 10 мыңнан артық кандидат аспан денелері қарастырылуда [13]. «NASA экзопланеталар архиві» қорында [15] осы деректер үздіксіз жаңарып, күннен-күнге өсіп отыр. Алдағы он жылдықта экзопланеталардың саны шамамен он мыңдықтарға жетуі мүмкін деген болжам бар. Күннен-күнге сан жағынан өсіп отырған экзопланета жүйелері астрономияда да айнымалы массалы N планеталы көп дене мәселесін зерттеудің өзектілігін көрсетіп отыр. Экзопланеталардың динамикалық эволюциясын зерттеу сол экзопланета жүйесінің келешектегі даму кезеңдерін анықтауға мүмкіндік береді. Бейстационар экзопланеталардың динамикалық эволюциясын зерттеу біздің Күн жүйеміздің динамикалық даму үрдісін түсінуімізге мүмкіндік береді және галактикадағы динамикалық үрдістер туралы түсінігімізді арттырады.

Жұмыстың мақсаты. Массалары әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгеретін сфералық көп дене мәселесінің ғасырлық ұйытқу теңдеулерін Пуанкаре екінші жүйе элементтерінің аналогтарында алу, алынған теңдеулер негізінде бейстационар экзопланета жүйелерінің динамикалық эволюциясын зерттеу.

Зерттеу міндеттері:

1. массалары әртүрлі қарқында изотропты түрде өзгеретін көп дене мәселесінің ұйытқыған қозғалысын абсолютті координаталар жүйесінде қарастыру;

2. ұйытқыған қозғалыстың канондық теңдеулерін Пуанкаре екінші жүйесі айнымалыларының аналогтары арқылы салыстырмалы координаталар жүйесінде зерттеу;
3. ұйытқы функциясын кіші параметрлер бойынша кез-келген дәлдікке дейін қатарға жіктеу алгоритмін құру және *Wolfram Mathematica* көмегімен аналитикалық түрде ұйытқытушы функцияны кіші параметрлер бойынша қатарға жіктеу;
4. Лаплас коэффициенттерін бірінші текті және екінші текті эллиптикалық интегралдар арқылы өрнектеу;
5. канондық теңдеулер жүйесін орташалу нәтижесінде ғасырлық теңдеулер жүйесін алу және екі кіші жүйеге бөліп қарастыру;
6. кез-келген N планеталы жүйенің динамикалық эволюциясын зерттеуге мүмкіндік беретін өлшемсіз ғасырлық теңдеулер жүйесін алу;
7. төрт және сегіз дене мәселесі үшін өлшемсіз ғасырлық теңдеулер жүйесін айқын ашып жазу;
8. 1 орталық жұлдызды 3 планеталы *K2-3* экзопланета жүйесі үшін, 1 орталық жұлдызды 7 планеталы *Trappist-1* экзопланета жүйесі үшін және 2 планеталы *TOI-1338* қос жұлдызды жүйесі үшін Коши есебін сандық тәсілмен шешу;
9. *K2-3*, *Trappist-1* және *TOI-1338* экзопланеталары орбита элементтерінің уақыт бойынша эволюциясын зерттеу және алынған нәтижелерді талдау, массалардың айнымалығы планета жүйесінің динамикасына қалай әсер ететіндігін анықтау.



2 сурет – 2024 жылдың 12 сәуіріне дейін анықталған жалпы экзопланеталар саны 5609. Деректер қоры NASA экзопланеталар архиві [13] сайтынан алынды

Зерттеу нысаны. Негізгі жазықтық маңайында кіші эксцентриситетпен квазиэллипстік орбитада қозғалыс жасайтын 3 және одан да көп планетасы бар 1 орталық жұлдызды экзопланета жүйелері немесе 2 және одан да көп планетасы бар қос жұлдызды жүйелер.

Зерттеу пәні: ғасырлық ұйытқудың канондық автономды емес сызықты дифференциалды теңдеулері, динамикалық эволюцияны зерттеуге мүмкіндік беретін бейстационар экзопланета жүйелеріне сәйкес келетін адекватты математикалық моделдер.

Зерттеу әдістері. Канондық ұйытқу теориясының әдістері және автономды емес сызықты дифференциалдық теңдеулерді шешудің математикалық әдістері және қатарға жіктеу әдістері, *Wolfram Mathematica*-ның заманауи сандық әдістері және Пикар әдісі қолданылды.

Қорғауға шығарылатын ғылыми тұжырымдамалар:

1. салыстырмалы координаталар жүйесінде массалары изотропты түрде өзгертін көп дене мәселесінің Пуанкаре екінші жүйесі аналогтары арқылы алынған канондық ғасырлық теңдеулер жүйесі;
2. төрт дене мәселесі және сегіз дене мәселесі үшін айқын түрде алынған өлшемсіз ғасырлық теңдеулер жүйесі;
3. *K2-3*, *Trappist-1* және *TOI-1338* экзопланета жүйелерінің орбита элементтерінің өзгерісінің динамикалық эволюциясы.

Диссертацияның ғылыми жаңалығы. Массалары изотропты түрде өзгертін көп дене мәселесінің ғасырлық ұйытқу теңдеулері бірінші рет алынып отыр. Алынған ғасырлық теңдеулер эксцентриситеті мен көлбеулігі кіші экзопланеталардың динамикалық эволюциясын зерттеуде қолданылады. Бұл канондық теңдеулер кез-келген массаның өзгеру заңдылығы үшін және кез-келген N планетасы бар экзопланета жүйесі үшін орынды.

Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы: Пуанкаре айнымалыларының екінші жүйесінің аналогтары арқылы алынған ғасырлық теңдеулері теориялық тұрғыдан айнымалы массалы сфералық $N+1$ дене мәселесін зерттеудің іргетасы бола алады. Алынған ғасырлық ұйытқу теңдеулері негізгі жазықтық маңайында кіші эксцентриситетті орбитада қозғалыс жасайтын экзопланеталардың динамикалық эволюциясын зерттеудің құралы ретінде практикалық маңызы бар.

Автордың жеке қосқан үлесі: Диссертацияның негізгі нәтижелерін автор өзі алды. Есептің қойылымы мен нәтижелерді талқылау жұмыстары ғылыми кеңесшілермен бірге іске асты.

Нәтижелердің сенімділігі. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер тұрақты масса жағдайында басқа авторлардың масса тұрақты көп дене мәселесін зерттеген жұмыстарымен, мысалға [16], сәйкес келеді. Сонымен қатар, алынған нәтижелердің сенімділігі мен негізділігі *Web of Science(Clarivate Analytics)* және *Scopus* дерекқорында индекстелетін шетел журналдарында жарық көрген мақалалар бар болуымен расталады.

Диссертациялық жұмыс материалдары бойынша жарық көрген ғылыми жұмыстар. Диссертациялық жұмыс бойынша жалпы саны 18 ғылыми

жұмыс жарық көрді. Оның ішінде *Web of Science*(*Clarivate Analytics*) (Q1, Q3 және Q4) және *Scopus* (процентильдері: 86, 18 және 2) дерекқорында 3 мақала жарық көрді. ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдар тізіміне кіретін журналдарда 4 мақала және халықаралық конференцияларда 11 жұмыс жарық көрді. Жалпы Оңтүстік Корея, Италия, Ресей, Польша, Бельгия, Чехия және Қазақстан мемлекеттерінде өткен халықаралық конференцияларда баяндама жасалынды. Соның бірі 2022 жылы Халықаралық Астрономиялық Ұйым ұйымдастырған Оңтүстік Кореяда өткен XXXI Бас Ассамблеясында грант ұтып алу негізінде конференцияда баяндама жасалынды.

Web of Science(Clarivate Analytics) және Scopus базасында жарық көрген мақалалар:

- 1) Mukhtar Zh. Minglibayev, Alexander N. Prokopenya, Aiken B. Kosherbayeva. Secular evolution of circumbinary 2-planet systems with isotropically varying masses // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, MNRAS 530, 2156–2165 (2024) . Advance Access publication 2024 April 16. Oxford University Press, <https://doi.org/10.1093/mnras/stae1015>.
- 2a) A. N. Prokopenya, M. Zh. Minglibayev, A. B. Kosherbaeva. Derivation of Evolutionary Equations in the Many-Body Problem with Isotropically Varying Masses Using Computer Algebra // Programming and Computer Software, 2022, Vol. 48, No. 2, pp.107-115. Pleiades Publishing, <https://doi.org/10.1134/S0361768822020098>
- 2b) А.Н. Прокопеня, М.Дж. Минглибаев, А.Б. Кошербаева. Построение эволюционных уравнений в задаче многих тел с изотропно изменяющимися массами с применением компьютерной алгебры. // Программирование, 2022, №2, с. 53-62, Издательство «Наука». DOI: 10.31857/S0132347422020108, url: <https://sciencejournals.ru/view-article/?j=program&y=2022&v=0&n=2&a=Program2202010Prokopenya>
- 3) Alexander Chichurin, Alexander Prokopenya, Mukhtar Minglibayev, Aiken Kosherbayeva. Symbolic-Numeric Computation in Modeling the Dynamics of the Many-Body System TRAPPIST Lecture Notes in Computer Science (LNCS), 14075, pp. 469-482, 2023. Springer International Publishing, https://doi.org/10.1007/978-3-031-36024-4_36.
- 4) "XXXIst General Assembly of the International Astronomical Union IAUGA 2022" конференция негізінде келесі мақала жарық көрді:
- 5) A.B. Kosherbayeva, M.Zh Minglibayev. Evolution equations of the multi-planetary problem with variable masses // Proceedings of the International Astronomical Union , No 370: Winds of Stars and Exoplanets , 2023 , pp. 283 – 284. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/S1743921322003611>

ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған басылымдар тізіміне кіретін журналдарда жарық көрген мақалалар:

- 1) M. Zh. Minglibayev, A. B. Kosherbaeva. Differential equations of planetary systems // Reports of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. V. 2, N. 330 (2020), pp. 14 - 20. [https : // doi.org/](https://doi.org/)

10.32014/2020.2518 - 1483.26 . NAS RK. url: <https://journals.nauka-nanrk.kz/reports-science/article/view/725/597>

- 2) M. Zh. Minglibayev, A. B. Kosherbayeva. Equations of planetary systems motion // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical series. V. 6, N. 334 (2020), pp. 53 - 60. NAS RK. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.97>
 - 3) M. Minglibayev, A. Kosherbayeva. Evolution equations of multi-planet systems with variable masses // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. Vol 116 No 4 (2022), pp. 35-45. Al-Farabi Kazakh National University. <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v116.i4.04>
- The International Conference «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education» (CITech-2022) dedicated to the 90th anniversary of Academician N. K. Nadirov, to the 80th anniversary of Academician M. O. Otelbaev (October 12-15, 2022) конференция негізінде келесі мақала жарық көрді (ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған журнал):
- 4) M. Minglibayev, A. Kosherbayeva. System of linear differential equations of secular perturbations of exoplanets with variable masses // Совместный выпуск: Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан и Вычислительные Технологии Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 2022, стр 134. <https://acagor.kz/media/uploads/citech-2022/Proceedings.pdf>

Жұмыстың апробациясы:

- 1) M. Minglibayev, A. Kosherbayeva. Evolution equations of the multi - planetary problem with variable masses // Abstract book of the "XXXIst General Assembly of the International Astronomical Union IAUGA 2022" Busan Exhibition and Convention Center (BEXCO) 55 APEC - ro, Haeundae - gu Busan, South Korea, August 02 - 11, 2022, p. 348.
- 2) M. Zh. Minglibayev, A. N. Prokopenya, A. B. Kosherbayeva. Investigation of the dynamic evolution of planetary systems with isotropically varying masses // Abstract book of the Complex Planetary Systems II Kavli-IAU Symposium 382, Namur, Belgium, July 3-7, 2023, p. 42-43.
- 3) Kosherbayeva A. Equations of secular perturbations of exoplanetary systems with variable masses // Abstract book of the "CELMEC VIII The Eighth International Meeting on Celestial Mechanics", University of Rome Tor Vergata, Italy, September 05-09, 2022, p. 10-11.
- 4) Mukhtar Minglibayev, Alexander Prokopenya, Aiken Kosherbayeva. The problem of many bodies with isotropically varying masses // Abstracts of the 28th International Conference on Applications of Computer Algebra ACA'2023. Warsaw University of Life Sciences (SGGW), Institute of Information Technology, Warsaw, Poland, July 17- 21, 2023, p. 70.
- 5) A. Chichurin, A. Prokopenya, M. Minglibayev and A. Kosherbayeva. Symbolic-Numeric Computation in Modeling the Dynamics of the Many-Body System TRAPPIST. // Abstracts of the 23rd International Conference on

- Computational Science, The Czech Technical University in Prague (CTU), Prague, Czech Republic, July3-5, 2023, p. 99.
- 6) A.N.Prokopenya, M.Zh.Minglibayev, A.B.Kosherbayeva. Symbolic computation in studying the evolutionary equations in the problem of many bodies of variable masses. // Seminar on Computer Algebra, CMC faculty of MSU & CCAS Moscow, Russia, September 29, 2021, <http://www.ccas.ru/sabramov/seminar/doku.php?id=archive2123>.
 - 7) M. Minglibayev, A. Kosherbayeva. Linear non-autonomous differential equations, determining secular perturbations of exoplanetary systems with variable masses // Abstract book of the International Conference «Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education» (CITech-2022) dedicated to the 90th anniversary of Academician N. K. Nadirov, to the 80th anniversary of Academician M. O. Otelbaev, Almaty, Kazakhstan, October 12-15, 2022, p. 92.
 - 8) А. Б. Кошербаева. Дифференциальные уравнения планетных систем с переменными массами // материалы Международной конференций "Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования", г. Алматы, Казахстан, 01-03 апреля, 2020, с. 95-97.
 - 9) Кошербаева А. Б. Массалары айнымалы планета жүйелерінің қозғалыс теңдеулері // Материалы международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі», г. Алматы, Казахстан, 6-9 апреля 2020, с. 78.
 - 10) Кошербаева А. Б. Эволюционные уравнения экзопланетных систем с переменной массы // Материалы международной научной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі», г. Алматы, Казахстан, 04-06 апреля, 2022, с. 59.
 - 11) A.N.Prokopenya, M.Zh.Minglibayev, A.B.Kosherbayeva. Symbolic-numeric computation in modeling the dynamics of the many-body systems of variable masses // Seminar on Computer Algebra, CMC faculty of MSU & CCAS, May 15, 2024. <http://www.ccas.ru/sabramov/seminar/doku.php?id=start>

Диссертацияның құрылымы мен көлемі. Диссертация кіріспеден, 6 бөлімнен, қорытынды, әдебиеттер тізімінен, қосымшадан тұрады. Кіріспеде диссертациялық жұмыстың жалпы сипаттамасы жасалынды, зерттеу жұмысының өзектілігі келтірілді және алынған нәтиженің сенімділігі көрсетілді. Диссертациялық жұмыс жалпы 135 беттен тұрады және 34 сурет, 14 кесте бар.

Бірінші бөлімде орбиталық эволюцияны зерттеу жұмыстарына шолу жасалынды. Соның ішінде көп дене мәселесін тұрақты масса кезінде зерттеу жұмыстарының негізгілері атап өтілді. Айнымалы массалы көп дене мәселесі бойынша зерттеу тарихы келтірілді және бүгінгі таңда осы бағытта жасалынған жұмыстар атап өтілді.

Екінші бөлімде экзопланета жүйелері туралы жалпы ақпарат берілді, соның ішінде жұлдыз классификациясы мен планеталардың түрлері туралы мағлұмат кеңінен берілді.

Үшінші бөлімде айнымалы массалы көп дене мәселесі қарастырылды. Абсолютті және салыстырмалы координаталар жүйесінде жалпы жағдай үшін массалары анизотропты түрде өзгертін көп дене мәселесі қарастырылды. Соның негізінде салыстырмалы координаталар жүйесінде изотропты түрде массалары өзгертін көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеулер жүйесі жазылды және бұл жүйенің интегралданбайтындығы көрсетіліп, осы есепті интегралдау тапсырма ретінде қойылды. Теңдеулер жүйесін ыңғайлы түрде жазып алып, алғашқы жуық шешімдері алынды және канондық ұйытқу теориясы қолданылды. Қозғалыс теңдеулері Пуанкаре жүйесінің екінші элементтерінің аналогтары арқылы алынды.

Төртінші бөлім айнымалы массалы көп дене мәселесіндегі ұйытқытушы функцияны қатарға жіктеуге арналған. Қатарға жіктеудің жалпы сұлбасы келтірілді және ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігі қатарға жіктелді. Нәтижесінде ұйытқытушы функция орташа бойлық бойынша орташаланып, айнымалы массалы көп дене мәселесінің ғасырлық ұйытқу теңдеулер жүйесі алынды.

Бесінші бөлімде Пуанкаре екінші жүйесі элементтерінің аналогтары арқылы жазылған көп дене мәселесінің эволюциялық теңдеулері алынды, өлшемсіз түрге келтірілді.

Алтыншы бөлімде айнымалы массалы өлшемсіз эволюциялық теңдеулерді төрт дене мәселесі үшін және сегіз дене мәселесі үшін жазылды. K2-3, Trappist-1 және TOI-1338 экзопланета жүйелерінің оскуляция элементтерінің графиктері алынды және орбита элементтерінің эволюциялық өзгерісі зерттелінді.

Қорытынды бөлімде жалпы осы диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер талданды.

Алғыс. Автор отандық ғылыми кеңесші, ф.-м.ғ.д., профессор М. Дж. Минглибаевқа және шетелдік ғылыми кеңесші, профессор А. В. Чичуринге мәселенің қойылымын қойып бергені үшін және диссертациялық жұмыстың барлық кезеңдерінде ғылыми басшылық жасағаны үшін, баға жетпес көмек пен құнды кеңестер бергені үшін зор алғысын білдіреді.

1 ОРБИТА ЭВОЛЮЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ ЖҰМЫСТАРЫНА ШОЛУ

1.1 Тұрақты массалы көп дене мәселесін зерттеу жұмыстарына шолу

Аспан механикасында көп дене мәселесі әлі де талай уақытқа дейін маңыздылығын жоғалтпайды. Бірінші кезекте тұрақты массалы көп дене мәселесіне қысқаша шолу жасайық. Санникова және Холшевников [17] мақалада екі дене мәселесі зерттелген және теңдеуді шешу алгоритмі орташаланған элементтер арқылы беріліп эволюциялық дифференциалдық теңдеулер алынған. Зерттелінетін сфералық дене шеңберлік орбитамен реактивті үдеу бар центрлік өрісте қозғалыс жасайды. Бұл жерде орталық дененің тарту күші әсерінен пайда болған негізгі үдеуге қарағанда реактивті үдеу әлде-қайда кіші деп қарастырылған. Бұл есепте денелердің массалары тұрақты және ұйытқытушы үдеудің кем дегенде бір құрауышы нөлге тең жағдайда қозғалыс теңдеулер жүйесі интегралданады. Ал егер ұйытқытушы үдеудің барлық құрауыштары нөлден өзгеше болса, бұл есеп екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіріледі және интегралданбайды.

Чазов [18] жұмысында орталық жұлдызды айнала қозғалатын және өзара қиылыспайтын орбиталарда орналасқан екі материалды нүкте арақашықтығының кері шамасын қатарға жіктеу орындалған. Қатарға жіктеу кіші шамаларға (эксцентриситет және орбиталар көлбеуліктерінің синустары) қатысты оныншы дәлдікке дейін алынған. Бұл нәтиже Күн жүйесіндегі сегіз планета жүйесіндегі ұйытқу функциясын орташалаудың және орташаланған қозғалыс теңдеуін сандық интегралдаудың негізгі операциясы болып табылады [19].

[20] және [21] жұмыстарды авторлар орталық жұлдыздың қисық сәулелік жылдамдық көмегімен экзопланеталардың бастапқы орбиталарын анықтау методологиясын сипаттады және екі дене мәселесі теңдеуінің шешімін қатарлар түрінде анықтау алгоритмін құрды, сонымен қатар эксцентриситеттің кіші мәні кезінде қатарлар теңдеудің шешіміне ұмтылатындығын дәлелдеді.

Холшевников, Греб және Кузнецов [22], [23], [24], [25] жұмыстарында Күн-Юпитер-Сатурн үш дененің орбитальді эволюциясы тұрақты масса кезінде зерттелген. Оскуляция элементтері арқылы жазылған гамильтониан барлық элементтер бойынша Пуассон қатарына жіктелген және екі планета жүйесі үшін орташаланған қозғалыс теңдеуін 10 млрд. жыл уақыт интервалында сандық түрде интегралдаған. Нәтижесінде планеталар шамамен периодты қозғалыс жасайтындығы анықталған. Юпитер мен Сатурнның эксцентриситеттері және орбита көлбеуліктері нөлден өзгеше кіші шама болып қалады. Қарастырылған барлық уақыт интервалында қысқа периодты ұйытқу кіші шама болып сақталатындығы анықталған.

Белкина және Кузнецов [26] жұмыста Күн радиациясы қысымының әсерінен болатын Күнге жақын шеңберлік орбитаның динамикалық эволюциясы зерттелген. [27] жұмыста авторлар өмір сүру жасы бойынша жаңадан құрылған, жақын орбиталы астероидтар жұптарының динамикалық эволюциясына талдау

жұмыстарын жасады. [28] жұмыста HD 39194 үш планеталы экзожүйенің және HD 141399, HD 160691 (μ Ara) төрт планеталы экзожүйелердің орбитальді эволюциясы зерттелген. Нәтижесінде авторлар экзопланеталардың массалары бойынша екінші ретті орталанған жартылай аналитикалық қозғалыс теориясын құрды. Бұл жерде төрт дене және бес дене мәселесі қарастырылған. Қозғалыс теңдеуі Якоби координатасында берілген және Пуанкаренің екінші жүйесінде жазылған.

Перминов және Кузнецов [29] жұмыста Күн жүйесінің 4 планетасының эволюциясын зерттеген. Орталанған қозғалыс теңдеулері төртпланеталы жүйе үшін кіші параметр бойынша үшінші дәрежеге дейінгі дәлдікпен аналитикалық түрғыда құрылған. Бұл жерде Күн-Юпитер-Сатурн-Уран-Нептун жүйесі қарастырылған.

Перминов пен Кузнецов тұрақты массалы бес дене есебінің қозғалыс теориясын құру мәселесін [16] жұмыста қарастырылған. Төрт планеталы жүйенің қозғалысы Якоби координаталар жүйесінде зерттелген. Бұл жерде гамильтониан Пуанкаренің екінші жүйесінің оскуляция элементтері арқылы Пуассон қатарына жіктелген. Пуанкаре элементтері арқылы жазылған қозғалыс теңдеуі кіші параметр бойынша 3 ретті дәлдікке дейін орындалған. Аналитикалық түрде алынған қозғалыс теңдеулерін сандық түрде интегралдау арқылы Күн-Юпитер-Сатурн-Уран-Нептун жүйесінің орбита эволюциясы зерттелген. Зерттеу 100 млн жыл интервалында іске асқан.

Кузнецов [30] мақаласында Плутон ергежейлі планетасы мен сегіз ірі планеталардың ұйытқуын, сонымен қатар релятивистикалық әсерлер мен Күннің формасын, Яковский әсерін ескере отырып, Phaethon астероидтар шоғырының орбитальді эволюциясы зерттелген.

[31] жұмысында орталық дененің массасы басқа өзара әсерлесетін денелердің массаларынан әлде-қайда көп деп алынып, классикалық N дене мәселесі қарастырылған және қозғалыс теңдеулер жүйесі канондық Делоне айнымалылары арқылы барицентрлік координата жүйесінде алынған. Орташаланған қозғалыс теңдеулер жүйесінің негізінде орбита көлбеулігі мен эксцентриситет эволюциясын сипаттайтын функция табылды. Күн жүйесі планеталары үшін эксцентриситет пен орбита көлбеулігінің өзгеру жылдамдығын сандық түрғыдан бағалау келтірілген.

Плохотников [32] жұмысында Күн жүйесінің уақыт бойынша динамикасын сандық модельдеу жасалған және аналитикалық әдістер негізінде Күн жүйесінің орнықтылығы бес және одан да млрд. жыл интервалындағы орнықтылығы жоғарғы жуықтау дәлдігімен (10 және одан да жоғары) сандық түрғыда да көрсетілді.

1.2 Айнымалы массалы көп дене мәселесін зерттеу жұмыстарына шолу

Гравитацияланатын жүйелерде масса параметрінің ролі ерекше. Классикалық аспан механикасында және теориялық механикада денелердің массасы тұрақты деп қабылданады, және осылай жасалынған болжам өзінің

маңыздылығын жоғалтпайтыны сөзсіз. Алайда, классиктердің өздері де массаның тұрақты болуының гравитацияланатын бейстационар денелердің динамикалық эволюциясын зерттеуде адекватты емес екендігін байқаған.

Аспан денелерінің массасы динамикалық эволюцияда маңызды физикалық параметр болып табылады. Гравитацияланатын денелердің массаларының айнымалылығы эволюциялық тректердің мол қорын (түрін) анықтайды.

Аспан механикасында бейстационар айнымалы массалы көп дене мәселесін зерттеу жұмыстарының тарихы мен даму жолына шолу жасайық. Айнымалы массалы екі дене мәселесін зерттеу шамамен Гильденнің жұмысынан [33] бастау алды. Ол осы мәселенің дифференциалды қозғалыс теңдеуін жазды. Гильден теңдеуінде массаның өзгеруінің дербес жағдайы үшін алғашқы интегралданатын жағдайды Мещерский анықтады [34].

Массаның бұл өзгеру заңдылығы және оның ары қарай жалпылануы Мещерский заңы ретінде белгілі [35]. Мещерскийдің еңбегінен кейін бұл мәселенің физикалық мағынасы түсінікті болды және ол қазір Гильден-Мещерский мәселесі ретінде танылған. Бұл есеп бірінші рет астрономияда екі дене мәселесі ретінде Жер-Ай жүйесінің параметрлерінің эволюциясындағы метеорлық аккреция рөлі туралы С.Дюфур [36] гипотезасымен жарық көрді. Кейінірек, И.В. Мещерский массаның өзгеру заңдылығының дербес жағдайында осы мәселенің интегралданатынын, кеңістікті-уақыттық алмастырулар жасау әдісі арқылы анықтады [37]. Осылайша, массасы изотропты түрде өзгертін екі дене мәселесі пайда болды. Бұл келесі теңдеумен сипатталатын Гюльден-Мещерский мәселесі болып табылады:

$$\ddot{\vec{r}}_{12} = -f \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}, \quad r_{12} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1)$$

мұндағы, f - гравитациялық тұрақты, $m_1 = m_1(t)$, $m_2 = m_2(t)$ - екі дененің массасы, r_{12} - екі дене арасындағы ара-қашықтық.

Алайда, Гюльден-Мещерский мәселесінің (1.1) жалпы шешімі масса өзгеруінің кез-келген заңдылығы үшін орынды емес.

Джинс [38] қос жұлдыздың орбитасын зерттей отырып, сол жылдары Эддингтон ұсынғандай жұлдыздың жарықтығы мен массасының қатынасына негізделген массаның өзгеруінің жалпы заңдылығын байқады. Эддингтон-Джинс заңдылығы келесідей сипатталады:

$$\dot{m}_i = \alpha m_i^n, \quad \alpha = \text{const}, \quad n = \text{const} \quad (1.2)$$

Денелердің массасы Эддингтон-Джинс заңдылығымен өзгерген жағдайда Гюльден –Мещерский мәселесі астрономияда жиі пайдаланылады. Мещерский заңдылығы Джинс заңдылығының дербес жағдайы болып табылады. $n=2$ кезінде Мещерскийдің бірінші заңы, $n=3$ кезінде Мещерскийдің екінші заңы орындалады [39].

Б.Е. Гельфгат [40] жұмысында екі дененің массасы Эдингтон-Джинс заңдылығымен өзгерген жағдайда (дәреже көрсеткіші $n=1$ және $n=3/2$) энергияның квазиинтеграл әдісін қолдану арқылы Гильден-Мещерский есебінің интегралданатын жағдайларын анықтады. Ол [41] жұмысында Мещерский-Леви-Чивит есебінің масса Эдингтон-Джинс заңдылығымен (дәреже көрсеткіші $n=-2$, $n=1$, $n=4$) өзгертін жағдайда қатаң шешімдерін анықтады. [42] жұмысында айнымалы массалы екі дене мәселесінің жалпылануы қарастырылды. Бұл жұмыс Гильден-Мещерский және Мещерский-Леви-Чивита есептерін біріктіруші сұлба болып табылады және Гильден-Мещерский есебінің интегралдануымен байланысты осы біріктірілген сұлба есебінің интегралдану жағдайлары келтірілген. Осы жұмыста айнымалы массалы екі дене мәселесінің классикалық сұлбасының тығыз байланысы көрсетілген, яғни кеңістіктік-уақыттық алмастырулар арқылы Гильден-Мещерский есебінен Мещерский-Леви-Чивит есебіне өту және кері өту әдісі көрсетілген.

Массалардың нақты өзгеру заңдылығының интегралданатын жағдайларына шолу және Гильден-Мещерский мәселесінің қызықты нәтижелері дифференциалдық тендеуді түрлендіру әдісін қолдану арқылы, Л.М.Берковичтың [43] жұмысында зерттелген. Гильден-Мещерский мәселесінен бөлек айнымалы массалы екі дене мәселесінің көптеген әртүрлі дербес жағдайлары кездеседі. Олар реактивті күштердің бар-жоғына байланысты, бір немесе екі дененің де массасының өзгеруіне байланысты, денелердің инерциалды жүйеде қозғалыс жасауы немесе жасамауына байланысты, тағы сол сияқты тәуелділіктерге байланысты жіктелуі мүмкін.

Lopez және Juarez [44] жұмысында авторлар гравитациялық екі дене есебін зерттеді. Денелердің бірінің массасы айнымалы деп қарастырылған және қозғалыс барысында жұлдыз желінің әсерінен демпфирлік-антидемпфирлік ықпалға ұшырайды.

Prieto мен Docobo [45] жұмысында баяу азаятын массалы екі дене есебінің жуық аналитикалық шешімдер қатары анықталды. Бұл шешім А.Деприт ұйытқу әдісін қолдану арқылы, Гамильтон тендеуін интегралдау жолымен алынған. Гильден-Мещерский мәселесінің көптеген аспектілері ауқымды библиографиямен Деприттің [46] жұмысында келтірілген. Айнымалы массалы екі дене мәселесінің классификациясы Е.П. Разбитнаяның [47] жұмысында келтірілген. Айнымалы массалы екі дене мәселесінің кейбір аспектілері Е.П.Поляхованың [48] жұмысында айтылған.

Майлыбаев А.Т. [49] жұмысында айнымалы массалы шектелген екі дене мәселесін қарастырды. Байдолла Ф. [50] бейстационар үш өсті эллипсоидтың тарту өрісіндегі материялық нүктенің қозғалысын зерттеген.

Т.Б. Омаровтан [51] тәуелсіз түрде Дж. Хаджидиметриудың шолу жасалған [52] жұмысында Гильден-Мещерский мәселесінің жаңа интерпретациясы қойылған.

Сонымен қатар, [53] жұмысында Prieto мен Docobo жуық аналитикалық шешімдер қатарын анықтады. Лукянов [54], [55] жұмыстарында өзара жақын

орналасқан екі жұлдыз жүйесіндегі [56] консервативті масса алмасуға қолданыла алатын жалпы масса тұрақты жағдайдағы нақты мәселені зерттеген.

А.А. Беков Гюльден-Мещерский мәселесін сипаттайтын Бинэ тендеуі үшін автономизация әдісін нақты дербес шешімдерді алу үшін қолданып, [57] жұмысында жаңа нақты дербес шешімдерді параметрлік түрде алған.

Гильден-Мещерский мәселесі шектелген үш дене мәселесінде де қолданыла алады. Осындай қойылым кезінде, ауырлау екі дененің қозғалысы Гильден-Мещерский тендеуімен анықталады деп болжам жасалады. Осы болжам арқылы үшінші дененің қозғалысын ғана қарастырамыз, және осы үшінші дененің қозғалысы негізгі екі дененің қозғалысына әсер етпейді. Гельфгат [58] жұмыста осы мәселенің дербес шешімдері бар екендігін анықтады, бұл дербес шешімдер тұрақты массалы денелер үшін классикалық мәселенің стационар шешімдеріне ұқсас: үш коллинеарлы L1-L3 шешімдер және екі үшбұрышты L4-L5 шешімдер болып келеді. Сонымен қатар, Беков және Лукьянов жұмыстарында басқа да нақты шешімдер анықталды [59], [60], [61], [62]. Содан бері осы мәселенің сипаттамалары зерттелді, мысалы Лукьянов [63], Сингх және Леке [64].

Ferrari және Lavagna [65] жұмысында эллиптикалық шектелген үш дене мәселесінде коллинеарлы либрация нүктелерінің маңайындағы қозғалыстың периодтылығын зерттеген. Шеңберлік шектелген үш дене есебінің периодты шешімдеріне шолу жасаған. Бұл жұмыста геометрия, динамикалық өзгеріс және бір айналым жасайтын орбитаның орнықтылық қасиеті, сонымен қатар екі, үш және төрт айналымды шешімдер келтірілген.

Реактивті күштер жоқ кезде (массаның изотропты өзгерісі кезінде) айнымалы массалы үш дене есебінің А.А. Орлов [66] жұмысында көрсетілгендей дербес шешімдері бар. Ол шешімдер Мещерский заңдылығы бойынша бірдей қарқында массалар өзгерген кезде классикалық үш дене есебінің Лагранждық гомографикалық шешімдеріне аналог бола алады. Б.Е.Гельфгат [42] жұмысында көрсеткендей, осындай гомографикалық шешімдер сәйкес айнымалы массалы екі дене есебінде шешімі бар болған кездегі барлығында орын алады.

Л.Г. Лукьяновтың [67] жұмысында бейстационар фотогравитациялық үш дене есебінің түзусызықты шешімі бар болу мүмкіндігі көрсетілген.

[68] жұмыста Abdullah және басқа да авторлыр шеңберлік шектелген үш дене есебінде шексіз кіші дене Джинс заңдылығы бойынша өз массасын өзгертеді деп болжап, Ньютон және Юкава гравитация потенциалы зерттелінген.

Омаркулов К.С. [69] жұмысында бейстационар центрлік емес өрістегі денелердің қозғалысын қарастырды.

Patricio және Tiago [70] мақаласында үш дене инерциалды координаталар жүйесінде статикалық атмосферада массаны өзіне сіңіріп немесе массасын жоғалтып, қозғалыс жасайтын жағдайды қарастырды.

Омаров Т. Б. [71] жұмысында бейстационар ньютондық-гуктық өзара әсерлесетін үш дене мәселесінің қозғалысын зерттеді.

Лукьянов [72] жұмысында шеңберлі шектелген үш дене мәселесін қарастырды. Негізгі екі дененің массасы айнымалы деп, алайда массалардың қосындысы әрдайым тұрақты болып қалады деп есептің қойылымын қойды.

[73] жұмыста айнымалы массалы шектелген үш дене мәселесінде кориолис және центрден тепкіш күштердің аз ұйытқуларының сәйкесінше үшбұрышты нүктелердің (L4-L5) сызықты емес орнықтылығына әсері зерттелген.

[74] мақалада айнымалы массалы фотогравитациялық шектелген үш дене мәселесінде үшбұрышты либрация нүктелері зерттелінген. Бұл жұмыста негізгі екі дене де масса (үшқын, бөлшек) бөледі, ал шексіз кіші дене өз массасын уақытқа тәуелді түрде Джинс заңдылығына сәйкес өзгертеді.

Abouellmagd және Mostafa [75] жұмыста Джинс заңдылығы бойынша изотропты емес өзгертін айнымалы массалы шектелген үш дене мәселесінде үшінші дененің динамикасын аналитикалық тұрғыда зерттеген.

Abdullah [76] мақалада масса айнымалы жағдайда фотогравитациялық шеңберлік шектелген төрт дене мәселесінде тепе-теңдік нүктелерінің орнықтылығын зерттеді.

Шектелген төрт дене мәселесінде шексіз кіші массаның қозғалысы [77] жұмыста зерттелінген. Үш негізгі дененің екі орбитасы да эллиптикалық деп қарастырылған. Жазық нүктелердің тепе-теңдігінің орналасуы мен орнықтылығы Күн-Жер-Ай жүйесі үшін зерттелген.

[78]-ші жұмыста эллиптикалық шектелген төрт дене есебі (үш негізгі элементтен және массасыз бөлшектен тұратын жүйе) қарастырылған. Алғашқы бөлшектердің орбиталары эллиптикалық, және массасыз бөлшек өзара гравитациялық тарту күшінің әсерінен қозғалысқа түседі. Динамикалық теңдеулерден квазиинтеграл алынады. Ол шеңберлік шектелген үш дене есебінде Якоби интегралына аналог бола алады.

Ansari [79]-ші мақалада шеңберлік шектелген төрт дене мәселесін зерттеген. Үшөсті қатты дене ретінде теңқабырғалы үшбұрыштың төбелерінде орналасқан үш негізгі элемент алынады, ал төртінші кіші массалы дене өзінің массасын уақыт бойынша өзгертеді.

[80] жұмыста бес дене есебінде шексіз кіші дененің қозғалысының кейбір сипаттамалары мен параметрлерін сандық зерттеу келтірілген.

Лукьянов Л.Г. [81] жұмысында айнымалы массалы көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеуін зерттеді. N -дене есебі моделін қолдана отырып, [82] мақалада Күн өзінің жұлдыздық эволюциясын аяқтағаннан кейінгі сыртқы газ гиганттарының (Юпитер, Сатурн, Уран және Нептун) тағдыры қарастырылған. Күн шамамен қазіргі массасының жартысын жоғалтуынан гигант планеталардың орбиталары кеңейеді деп күтілуде. [83] жұмыста N дене мәселесінің интегралдануы сипатталған.

Т. Б. Омаровтың [51] жұмысында бірінші рет айнымалы массалы гравитацияланатын жүйенің динамикасын зерттеуде конустық қима бойынша апериодтық қозғалысты бастапқы ұйытқымаған қозғалыс ретінде қолдану ұсынылды. Ньютон теңдеуі арқылы ұйытқу теориясы [1], [2] жасалынды. Осы ұйытқу теориясын жалғыз планетаның эволюциясын зерттеу үшін Д. Верас, Дж. Хаджидиметриу және С.А. Тоуттың [84] жұмысында қолданылды және планета қозғалысын модельдеуде массаның анизотропты түрде өзгеруі туралы қызықты қорытынды жасалынды.

[85] жұмысында айнымалы массалы үш дене мәселесінің екі түрлі математикалық моделі масса алмасатын және масса жоғалтатын екі галактиканың өзара әсерін сапалы түрде сипаттау үшін қолданылады. Координатаның бас нүктесі ең үлкен денеде орнатылған, ал басқа екі дене тартылыс заңына байланысты ең үлкен дененің төңірегінде қозғалады. Екінші дененің массасы азаюы есебінде үшінші дене өзінің массасын көбейтеді. Және есептің қойылымы бойынша үшінші дене екінші галактиканың құйыршығы ретінде екінші дененің траекториясы соңынан қозғалып ереді. Бұл жұмыста өзара әсерлесетін галактиканың екіге бөліну эволюциясы зерттелген.

[86] жұмысында массалар алмасу орын алған жағдайда қос жұлдыздың классикалық динамикасы зерттелінген. Жұлдыздың бірі екіншісінен әлде – қайда үлкен деп болжанған және массасы аз жұлдыздың динамикасы оның массасының уақыттан тәуелді өзгерісі ретінде талданған. Жуықтаулар мен массаның алмасу моделі шеңберінде жалпы нәтиже алынған. Бұл нәтиже бойынша ең жеңіл жұлдыз массасын жоғалтса, оның периоды үлкейеді, егер осы жұлдыз массасын көбейтсе периоды да сәйкесінше азаяды.

Орналасуына тәуелді бір өлшемді консервативті жүйе үшін тұрақты қозғалыс алынады. Лагранжиан және гамильтониан функциялары арқылы орналасуынан тәуелді сызықты масса үшін кеңістіктегі траекторияны көрсетуге болады. Релятивтік жағдай үшін лагранжиан мен гамильтониан анық түрде жазылмайды. [87] жұмысында тұрақты күш әсер ететін және массаның орналасуынан сызықты түрде тәуелділігі нақты жүйе зерттелген. Бұл жұмыста лагранжиан нақты түрде анықталған, ал гамильтониан тұрақты қозғалыс кезінде анық емес.

2 ЭКЗОПЛАНЕТА ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ҚАЗІРГІ ЖАҒДАЙЫ

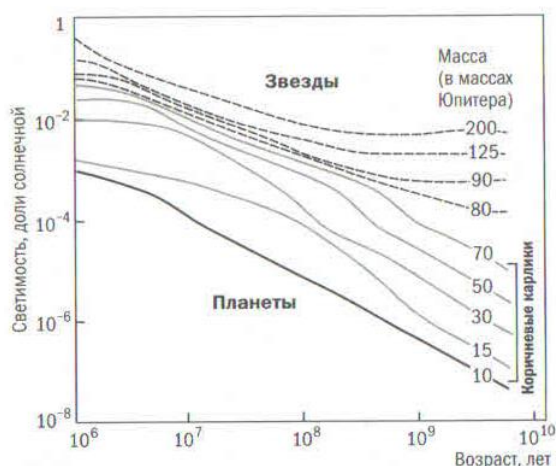
2.1 Экзопланета ұғымы және оның жіктелуі

Планета ұғымы. 2006 жылы IAU-дың (Халықаралық Астрономиялық Ұйым) XXVI Генеральді ассамблеясынан кейін «планета» ұғымы орбитальді қозғалыс түрлеріне тәуелді түрде бірнеше түрге жіктелінді. Біріншіден, планета массасына тең массалы дене массасы планетаға тән көлемі жағынан үлкендеу дененің төңірегінде айнала қозғалыс жасайтын болса, ондай денені «табиғи серік» деп атайды (мысалы, Ай). «Планета» (біз білетін классикалық планета) жеткілікті түрде үлкен объект болуы керек, сол кезде осы аспан денесінің гравитация әсерінен гидростатикалық тепе-теңдік (сфера формасына) қалпына ие бола алады және оның орбита маңайында массасы өзімен шамалас басқа денелер болмайды. Планеталар массаларының диапазоны Ай массасының 1%-нен 13 Юпитердің массасына дейінгі аралыққа ие. Яғни, $7 \cdot 10^{20}$ кг-нан $2 \cdot 10^{28}$ кг-ға дейінгі аспан денелері планета болып табылады. 13 Юпитер массасы планеталардың максималды массасы болып есептеледі.

Ергежейлі планета келесі шарттарды қанағаттандыру керек:

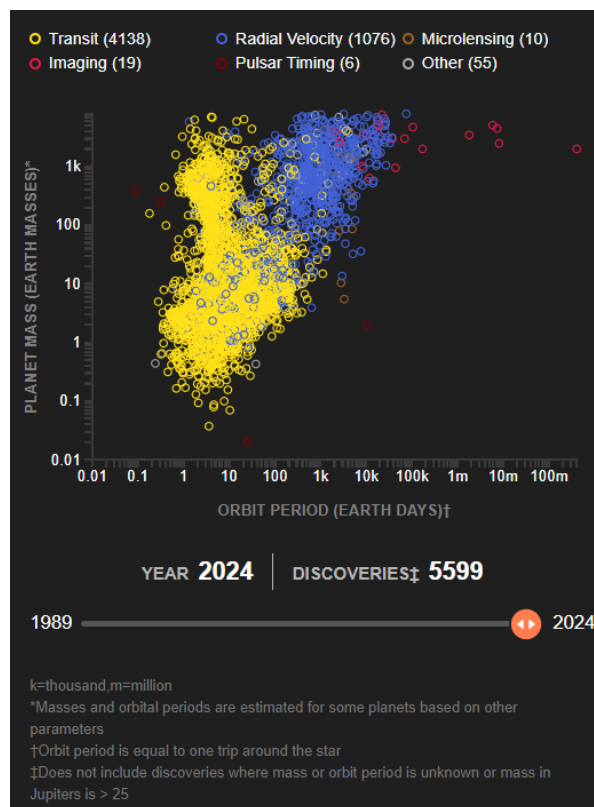
- жұлдыз төңірегінде айналуы керек;
- планетаның табиғи серігі болмауы керек;
- Жеткілікті түрде массасы болуы керек: ауырлық күші басқа денелердің қарсыласуынан көп болуы үшін және дененің формасы сфералық болуы үшін. Алайда, массасы салыстырмалы түрде үлкен болмауы керек.

Массасы 13 Юпитер массасынан 70 Юпитер массасы аралығында болып келетін аспан денелері қоңыр ергежейлілер деп аталады (3 сурет). Анықтылық үшін: 1 Юпитер массасы = 318 Жер массасы ($M_{\oplus}$) = 0.001 Күн массасы ($M_{\odot}$) = $2 \cdot 10^{27}$ кг.



3 сурет — Гравитациялық қысылу мен температураның көтерілу кезеңінен кейінгі планеталардың, қоңыр ергежейлілер мен жұлдыздардың жарқырау эволюциясы

Ал 4-суретте белгілі 5599 экзопланеталардың массалар бойынша таралуы көрсетілген.



4 сурет – Экзопланеталардың масса шамасы бойынша таралуы

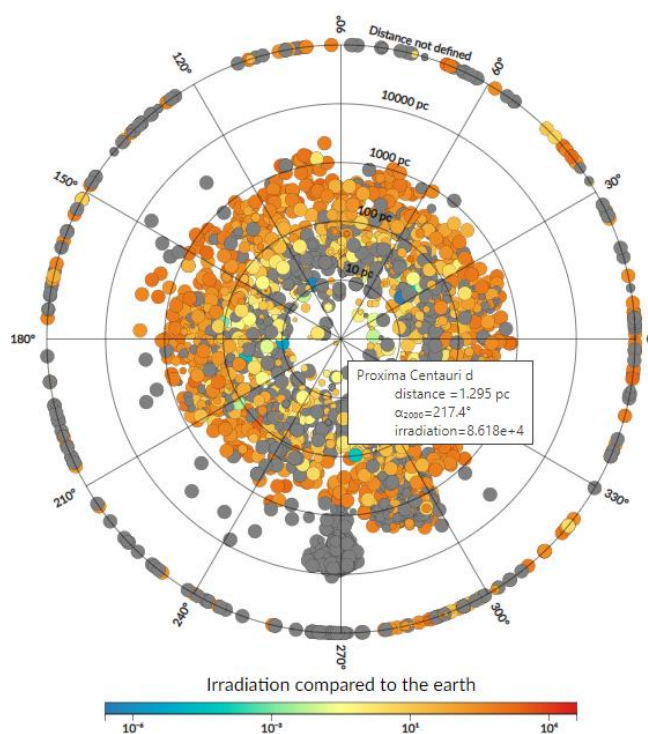
Экзопланета ұғымы. Құс жолы – бұл аспанды өте қараңғы және жарық түндерде кесіп өтетін жұлдыздардың тығыз ағыны. Оның спираль тәрізді кеңістігінде аз дегенде 100 млрд жұлдыз бар, соның ішінде біздің Күн жүйеміз де осы Құс жолында орналасқан. Егер әр жұлдыздың бірден артық планетасы болса, онда галактикамыздағы планеталар саны трлн-ға жетіп қалды. Осы күнге дейін тіркелген экзопланеталар салыстырмалы түрде галактиканың кіші аямағын алып жатыр. НАСА-ның «Кеплер» ғарыш телескопының көмегімен галактикамызда жұлдыздарға қарағанда планеталар көп екендігі белгілі болды.

Экзопланета – біздің Күн жүйеміздің сыртындағы массасы планета массасына тең қандай да бір аспан денесі. Көпшілігі орталық жұлдыздың маңайында айнала қозғалады, алайда ешқандай жұлдызға байланбаған еркін экзопланеталар да бар. Олар галактика центрінің төңірегінде айнала қозғалыс жасайды. Экзопланеталар «бір жыл» өлшемі бірнеше күнге тең болатындай өздерінің орталық жұлдыздарын өте жақын арақашықтықта айнала қозғалуы мүмкін.

Экзопланеталар біздің Күн жүйеміздегі планеталардың элементтеріне ұқсас элементтерден тұрады, алайда сол элементтердің қоспасының мөлшер қатынасы әр түрлі болуы мүмкін. Кейбір планеталарда су мен мұз басым болуы мүмкін, ал кейбірінде темір мен көміртек басым болуы мүмкін. Лавалы планеталар, мұхитты планеталар, тығыз-ісінген планеталар бар екендігі белгілі болды. Планета типтерін анықтауда масса мен көлем өлшемдері маңызды рөл ойнайды.

[88] сайттағы интерактивті графиктің центрінде Күн орналасқан және экзопланеталардың Күннен радиальді қашықтығын айқын көруге болады (5-

сурет). Біздің Күн жүйемізге ең жақын жұлдыз, спектральді типі *M* болып табылатын, *Proxima Centauri* қызыл ергежейлі жұлдыз болып табылады [89]. Физикалық параметрлері Жердің параметрлеріне өте ұқсас. Оның жарықтылығы Күннің 6×10^5 жарықтығын құрайды. Бұл қызыл ергежейліге дейінгі арақашықтық $1,32$ пк-ны құрайды. Келесі жақын жүйе қос жұлдызды *Alpha Centauri* жүйесі болып табылады. Ол Күннен $1,34$ пк қашықтықта орналасқан. 2012 жылдың 17 қазанында Дюмюск [90] жұмыс арқылы басқа да авторлармен бірлесе отырып, спектральді типі *K1* болып табылатын *Alpha Centauri B* жұлдызының планетасы белгілі болғанын хабарлады. Планета орбитасының үлкен жарты өсі $0,04$ а.б.-ке тең екендігі анықталды. Еуропалық шығыс обсерваториясы [91] 2016 жылдың 25 тамызында *Proxima Centauri b* экзопланетасы белгілі болғандығын хабарлады.



5 сурет – Экзопланеталардың Күннен радиальді қашықтығы [88]

SWEEPS-04 және *SWEEPS-11* экзопланеталары біздің Күн жүйемізден ең алыс планеталар болып саналады.

Экзопланеталардың ашылуы. 1960 жылдардың басында-ақ астрономдар гипотетикалық объектердің 3 типінің (қара құрдым, нейтронды жұлдыздар және экзопланеталар) табылу мүмкіндігін талдаған. 1967 жылы жылдам айналатын магнит өрісімен зарядталған нейтронды жұлдыздар – радиопульсарлар табылды. 1995 жылы Күн жүйесінің сыртында қандай да бір жұлдыз планеталарының бар болуы дәлелденді. Анықталған алғашқы экзопланета Күн тәріздес жұлдыздың маңайында 50 жарық жылы арақашықтықта қозғалатын «Ыстық Юпитер» 51 Pegasi b. 1996 жылы гипотетикалық объектің тағы бір түрі қоңыр ергежейлілер анықталды. Сол жылдары Күн жүйесінің перифериясында, яғни Койпер

белдеуінде, көптеген кіші планеталар анықталды. ХХІ ғасырда экзопланеталардың ашылуы қарқынды түрде бастама алып, күннен-күнге көбеюде. Мысалға, 2010 жылдың 14 қазаны 417 экзопланета жүйесіне тиесілі 469 экзопланета белгілі болды. Осы жылы белгілі болған экзопланета жүйелерінің бірі алты планетаға ие жүйе еді. Ал 2017 жылдың 17 қарашасы 2689 планеталық жүйе және 3580 экзопланета белгілі болды. Және планетасы ең көп жүйе 7 планеталы жүйе еді. Бүгінгі таңда 6 мыңға жуық экзопланеталар белгілі. Және 8 планетасы бар жүйе белгілі. Бұдан бөлек, экзопланета ретінде танылуға 10 мыңнан аса үміткер аспан денелері қарастырылуда [15].

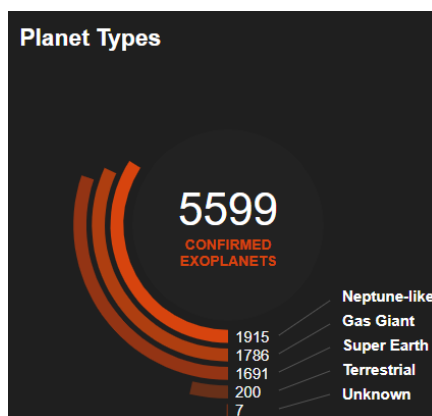
Экзопланеталардың түрлері. Экзопланеталар қос жұлдызды бір уақытта айнала қозғалыс жасауы да мүмкін, немесе жұлдызсыз, галактикада адасып, қозғалыс жасайтын жетім планеталарды да кездестіруге болады. Демек экзопланеталардың қозғалыс жасауына байланысты келесідей үлкен үш топқа жіктелінеді:

- бір жұлдызды айнала қозғалатын экзопланеталар;
- қос жұлдызды айнала қозғалатын экзопланеталар;
- жетім экзопланеталар.

Бақылау нәтижесінде алынған мағлұматтарға сүйенсек, кіші өлшемді шамамен көлемі Жерге, Марсқа ұқсас жартасты планеталардан бастап «Ыстық Юпитерге» дейінгі әртүрлі газ-гигантты экзопланеталар бар. 6-суретте тіркелген экзопланеталардың типтерге жіктелген диаграммасы келтірілген. Бұл диаграмма NASA сайтынан алынды [15].

Экзопланеталарды келесі түрлерге жіктеп қарастыруға болады:

1. Ыстық Юпитер тәріздес планета
2. Пульсарлі планета
3. Супержер тәріздес планета
4. Эксцентриситеттік планета
5. Ыстық Нептун тәріздес планета
6. Мұхитты планета
7. Хтоникалық планета



6 сурет – Экзопланета түрлерінің диаграммасы

Ыстық Юпитер тәріздес планета – өлшемі бойынша өте үлкен экзопланета. Оларды заманауи әдіс арқылы анықтау жеңіл болып табылады.

Пульсар – бұл жарылыстан кейін пайда болған, жылдам айналатын жұлдыз. Бұндай экзопланеталар пульсардан бөлінетін өте жоғары энергия аумағында орналасады, сондықтан осындай планеталарда өмір нышанының болу ықтималдығы өте аз.

Супержер планетасы $10 M_{\oplus}$ массасына дейінгі массаға ие. Бұндай планета өте тектоникалық белсенді болып келеді деп жоспарлануда. Галактикамызда белгілі экзопланеталардың 30,12 %-і осы Супержер тәріздес планеталар.

Ыстық Нептун $10 M_{\oplus}$ -нан $20 M_{\oplus}$ -ға дейінгі шамаға ие, яғни Нептун немесе Уран тәріздес планета. Салқын Нептуннан Ыстық Нептунның айырмашылығы жұлдызға жақынырақ орналасуында. Нептунға ұқсас экзопланеталар барлық экзопланеталардың шамамен 34,54 %-тін құрап тұр.

Мұхитты планета сұйық сумен толықтай немесе жартылай қамтылған планета бола алады. Немесе Ыстық Нептун тәріздес, алайда жұлдызға жақынырақ орналасады. Осылай орналасуы судың мұзға айналуына жол бермейді. Су қабаты бірнеше мың километрге дейін жете алады.

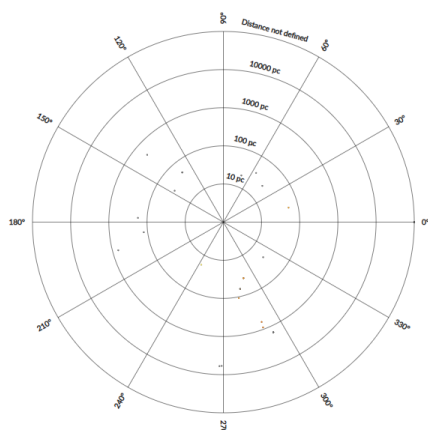
Хтоникалық планеталар өздерінің жұлдыздарына өте жақын орналасқан, жартастар мен лавалары көп планеталар.

Сонымен қатар, [88] сайтында Экзопланеталардың радиусын Жердің радиусымен салыстыра отырып, келесідей жіктеген:

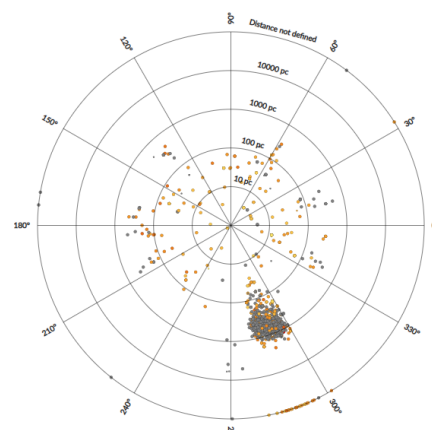
- Мини-Жер тәріздес планета (0-ден $0,5 R_{\oplus}$)
- Жер тәріздес планета ($0,5 R_{\oplus}$ -ден $1,5 R_{\oplus}$)
- Супержер тәріздес планета ($1,5 R_{\oplus}$ -ден $2 R_{\oplus}$)
- Мини-Нептун тәріздес планета ($2 R_{\oplus}$ -ден $4 R_{\oplus}$)
- Нептун тәріздес планета ($4 R_{\oplus}$ -тен $6 R_{\oplus}$)
- Юпитер тәріздес планета ($>6 R_{\oplus}$) және біздің Күн жүйемізден ара-

қашықтығы белгісіз планеталар.

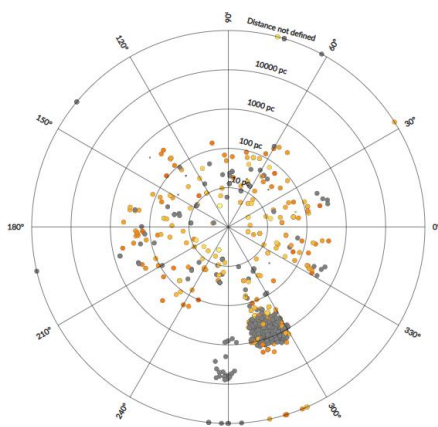
Мұндағы, $R_{\oplus}$ — Жер радиусы. 7-суреттен $R_{\oplus}$ бойынша жіктелген экзопланеталардың аз-көптігін анық көруге болады. Бұл диаграмма бойынша Мини-Жер тәріздес экзопланеталар өте аз кездессе, Юпитер тәріздес планеталар молынан екендігін көруге болады. Сонымен қатар, шамамен 275^0 - 300^0 аралығында 100 - 5000 pc аралығында планеталардың шоғыры байқалады.



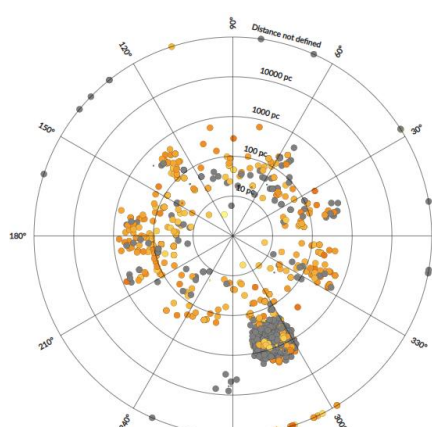
а



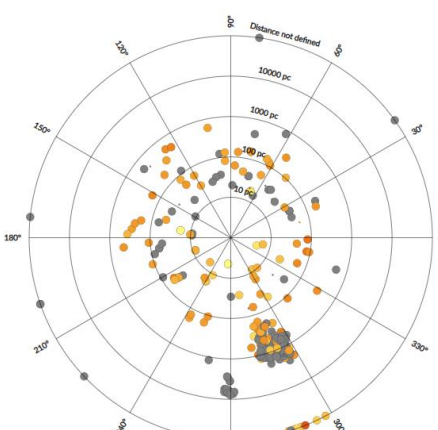
ə



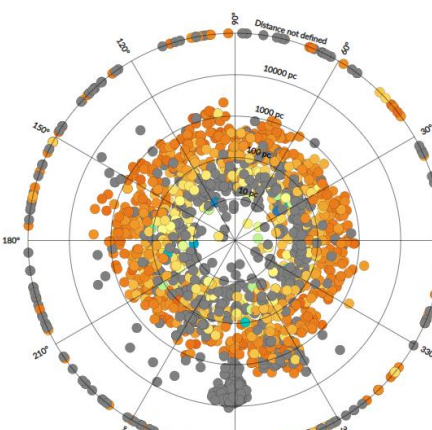
б



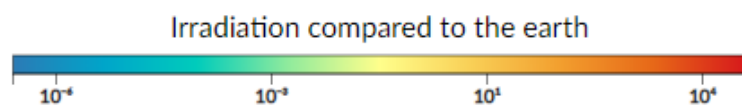
в



г)



ғ)



7 сурет – а) Мини-Жер тәріздес планеталар; ә) Жер тәріздес планеталар; б) Супержер тәріздес планеталар; в) Мини-Нептун тәріздес планеталар; г) Нептун тәріздес планеталар; ғ) Юпитер тәріздес планеталар

2.2 Жұлдыз ұғымы және оның жіктелуі

Табиғи аспан денелерінің барлық түрін объектілердің үш типімен: жұлдыздар, серіктік жұлдыздар және планеталармен байланыстыруға болады. [92] жұмысында осы аспан денелерінің минималды және максималды массалары туралы мәселелер талданды. Жұлдыздар – біздің және өзге де галактикада зерттеуге қол жетімді негізгі аспан денесі. Басқа аспан денелеріне қарағанда жұлдыздарға галактиканың көп массасы тиесілі. Оларды эволюцияның протожұлдыздан жұлдыз қалдықтарына айналғанға дейін әр кезеңінде бақылауға болады. Жұлдыздар параметрлерінің ішінен маңыздылары: массалардың интервалы, нөлдік жастағы жұлдыз массасының функциясы ретінде сутегінің жану уақыты. Галактика эволюциясы процесін анықтайтын маңызды статикалық байланыстар келесілер болып табылады:

- Нөлдік жастағы жұлдыз массасының протожұлдыз массасынан тәуелділігі;
- Жұлдыз қалдығы массасының нөлдік жастағы жұлдыз массасынан тәуелділігі.

Жұлдыздардың кілттік статистикалық сипаттамалары:

- Нөлдік жастағы жұлдыз бен протожұлдыз массасының спектрлары;
- Гиганттар мен жұлдыз қалдықтарының негізгі тізбектегі кезеңде өмір сүру уақытының нөлдік массадағы жұлдыз массасынан тәуелділігі.

Жұлдыз классификациясы. Әртүрлі планета жүйелеріне талдау жасау кезінде жұлдыз класстары өте маңызды. Стандартты *МК* классификация сұлбасында жұлдыздардың 7 типі келтірілген: *O*, *B*, *A*, *F*, *G*, *K* и *M* [93]. Жұлдыздардың классификациясы жұлдыздың әсер температурасымен (эффективной температурой) немесе жұлдыздың сәуле шығаруына кететін температурасымен анықталады. Ол шкала металды балқытып жіберетіндей өте жоғары температурадан өте төменгі мұздық температураға дейін болуы мүмкін. 1-кестедегі спектральді атлас стандартты спектральді типті жұлдыздарды, ерекше жұлдыздарды, айнымалы жұлдыздарды таңдауға мүмкіндік береді [94]. Әр спектральді тип 10 кіші классқа жіктеледі: *A0*, *A1*, *A2*, ...*A9* және т.с.с. Спектральді типтер және кіші класстар температуралық тізбекті береді: өте жоғары (*O* типті жұлдыз) температурадан өте төменгі (*M* типті жұлдыз) температураға дейін, және сол класстардың ішінде өте жоғары температурадан (*0*-кіші класс) өте төменгі температураға (*9*-кіші класс) дейін. Температура жұлдыздың түсін және жарықтығын анықтайды. *O* және *B* жұлдыздары ерекше жұлдыздар, алайда өте жарық болып келеді. Ал *M* типті жұлдыздар қарапайым, алайда жарықтығы төмен болып келеді.

O типті жұлдыз ең үлкен және температурасы 30 000-60 000 °K градустан өзгертін ең ыстық жұлдыз. Бұл жұлдыздар көк түс бөледі. *B* типті жұлдыз температурасы 10 000-30 000 °K диапазонында өзгертін келесі ыстық жұлдыз. Бұл жұлдыздар көгілдір түс бөледі. *A* типті жұлдыздар 7 500 – 10 000 °K температурасында жанады және ақ түс бөледі. *F* типті жұлдыздың

температурасы 6 000-7 500 °K. Сары-ақ түс бөледі. G типті жұлдыздар қатарына біздің Күніміз жатады. Бұл типті жұлдыз температурасы 5 000-6 000 °K, сары түспен сәулеленеді. K типті жұлдыз 3 500-5 000 °K температурасында жанады, қызғылтсары түспен сәулеленеді. M типті қызыл ергежейлілер 3 500 °K температурадан төменгі температурада жанады және қызыл түс бөледі [95], [96].

M типті және K типті жұлдыздар дегенмен аз. Осындай типті жұлдыздың массасы Күннің массасынан кіші. Кіші массалы жұлдыздардың доплерлік түсірілімдері көп емес, себебі олар табиғаттары бойынша әлсіз келеді. Сондықтан жеткілікті түрде күшті сигнал алу үшін үлкен телескоптар қажет болады. M және K типті жұлдыздардан бөлінетін астрофизикалық шум G және F типті жұлдыздарға қарағанда аз болғандықтан, M және K типті жұлдыздар көбірек анықталуда. M және K типті жұлдыздардың өзіндік жарықтығы төмен, демек аз энергия бөледі [97].

A, B, O типті үлкен жұлдыздар доплерлік әдістермен анықтала бермейді. Себебі, бұл жұлдыздардың жарықтылығы үлкен, демек бөлетін бөлшектері көп. және бұл жұлдыздар өз өстерінен жылдам айналады.

1 кесте – Орталық жұлдыздардың спектральді класстары

Жұлдыз типі	Түсі	Жұлдыз бетінің температурасы	Орташа массасы (Күн = 1)	Орташа радиус (Күн= 1)	Орташа жарықтығы (Күн = 1)
O	Көк	25,000 К-нен жоғары	60	15	1,400,000
B	Көгілдір	11,000 - 25,000 К	18	7	20,000
A	Ақ	7,500 - 11,000 К	3.2	2.5	80
F	Сары-ақ	6,000 - 7,500 К	1.7	1.3	6
G	Сары	5,000 - 6,000 К	1.1	1.1	1.2
K	Қызғылтсары	3,500 - 5,000 К	0.8	0.9	0.4
M	Қызыл	3,500 К-тен төмен	0.3	0.4	0.04 (very faint)

2.3 Экзопланета жүйелері ұғымы

Экзопланета жүйелері – бүгінде аспан денелерінің пайда болу этаптарын, қалыптасуының динамикалық эволюциясын зерттеуге үлкен мүмкіндік беріп отырған орталық бір немесе бірнеше жұлдызды айнала қозғалған кем дегенде бір планетасы бар жүйе. Ғаламда планета жүйелерінің бар болуы туралы идея алғашқы экзопланета ашылмай тұрып-ақ орын тапқан болатын. Қазіргі таңда 4 мыңнан артық экзопланета жүйелері анықталған.

Жұлдыз қалыптаса бастағанда оның маңайында көптеген нысан бөлшектері диск формасын құрады, оны протопланеталық диск деп атайды. Ол бұрыштық моменттің сақталу заңының жұмысы есебінде құрылады. Бұрыштық моменттің сақталу заңы бойынша айналып жатқан нысанның формасы сығыла бастаған кезде айналу үдейді. Сол уақытта нысан бөлшектері дискке құлайды, нәтижесінде айналмалы диск пайда болады. Күн жүйесінің бастапқы құрылуы осылай басталған. Бұл планеталардың құрылуының бастапқы нүктесі.

Осыдан кейінгі этаптар да қызықты болып табылады. Газдан, шаңнан және басқа да химиялық заттардан тұратын протопланеталық диск пен Орталық жұлдыз бар. Бөлшектердің арасында ешқандай гравитация жоқ, олар тек хаусты қозғалыста болып, бірігіп жатады. Дисктегі температураға мән беретін болсақ, жұлдызға жақын жердегі температурасы жоғары болады, ал алыстаған сайын төмендейді. Гравитация әсер ете бастағанда протопланеталар бір-бірімен әсер етіп үлкен ядролар пайда бола бастайды. Бұл процесс жылдам өтеді, сондықтан протопланета сырттағы газдарды өзіне тарта бастайды. Осы үрдіс сырттағы газдар таусылғанша жалғаса береді. Егер бұл процесс өте баяу іске асса, газ тұрақты болмағандықтан жоғалып кетеді. Шамамен 20 миллион жылдан соң жұлдыз әлі жас кезінде жұлдыздың маңайындағы газ толығымен таусылады: онда мұз жоқ, планеталар өте баяу құрылады, және олар газды тартатындай жеткілікті түрде үлкен өлшемді емес. Алайда бұл теорияға бағынбайтын, өлшемі бойынша Юпитер шамалас алайда өз жұлдызына өте жақын орналасқан экзопланеталар да бар. Шын мәнінде факторлар өте көп. Бұл процесстің барлығы протопланеталық дискіде орындалады. Диск бойынша гравитациялық толқындар таралады да, дискіде қалыңдау аудандар пайда болады. Дисктің кейбір бөлшектері іріленіп, планета құрыла бастайды. Осындай жолмен планета мен диск өзара гравитацияға түседі. Планета орбитасы пайда болуы үшін осы жеткілікті. Бұл механизм планетаның миграция теориясы ретінде белгілі.

[98] жұмыста авторлар экзопланета жүйелерінің заманауи құрылу моделі екі концепцияға негізделетіндігі айтылған: орбитальді миграция және динамикалық орнықсыздық. Сонымен қатар орталық жұлдыздан бөлінетін бөлшектердің ұшқындары да маңызды рольге ие. Жұлдызда бөлінетін бөлшектердің ұшқын әсері жұлдызға жасалатын дрейфтің тоқталуының және осы массивті планеталардың жұлдызға құламай аман қалуының басты себебі болуы мүмкін [99] [100] [101]. Миграция сипаты сонымен қатар резонанстардың пайда болуына да байланысты. Миграция жылдамдығы эволюцияның бастапқы стадияларында планетаға газдың үздіксіз аккрециясы кезінде салыстырмалы түрде жоғары болған болуы мүмкін, алайда сол уақытта аккреция кезінде газдың қызуы протопланета орбитасының экцентриситетінің өсуіне және резонанстың пайда болуына алып келуі мүмкін [102], [103]. Гигант-планеталардың миграциясы және олардың өзара әсерлесуі құрылып жатқан экзопланета жүйелерінің планета орбитасының орналасуына қатты әсер етуі қажет, мысалға, үлкен эксцентриситетті конфигурациялыр.

[89], [104] және [105] жұмыстарды бір орталық жұлдызды планета жүйелерінің құрылуы туралы заманауи көзқарастар қарастырылған. Газды-

шанды дисктердің бөлшектерінен физико-химиялық және динамикалық эволюция процессі кезінде планеталы жүйелер қалыптасады.

Аспан денесі өзі құрылған жерде қалмайды, орнын өзгертеді. Жұлдызға планета жақындаған сайын миграция жылдам болады, белгілі бір уақытта бұл процесс тоқтамаса планета жұлдызға құлайды. Жұлдыздың магнит өрісімен байланысты болатын тағы бір тоқтату механизмі бар екенін ескерейік. Жұлдызға планета жақындаған сайын жұлдыздың магнит өрісінің әсері сезіле бастайды, ол планетаның қозғалысын баяулата бастайды. Жарық сәулесі үшін де магнитті тормоз дәл осылай жұмыс істейді. Сонымен қатар, жұлдыздың маңайында ешқандай диск жоқ: ол жер өте ыстық, сондықтан да мүмкін, жоғарыда айтылған теория жұлдыз маңайында орынды емес, яғни жұмыс жасамайды. Ол тек қана кейбір құбылыстарды түсіндіруге мүмкіндік береді.

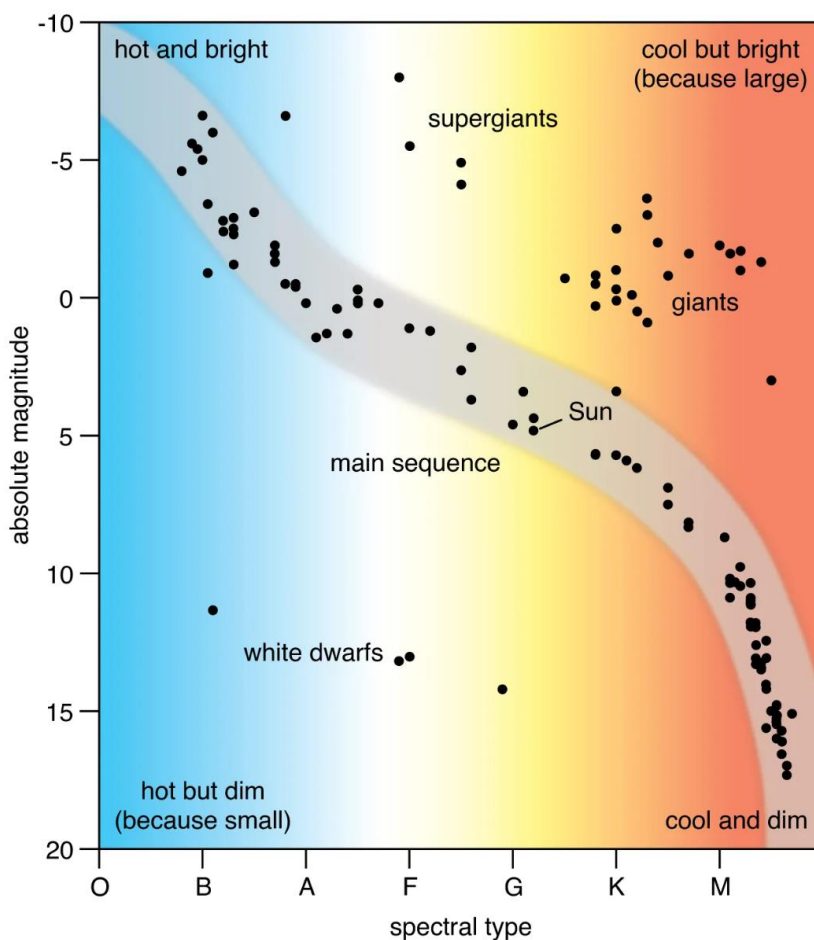
Жұлдыздар жалғыз пайда болмайды, олар жүйе ретінде қалыптасып, бір-бірімен гравитация арқылы қозғалысқа түседі. Олар тұрақты емес, біреуі екіншісін, екіншісі үшіншісін қозғалысқа түсіруі мүмкін. Олардың осындай өзара әсері драмалық түрде көрініс табуы мүмкін: басында бір толық жүйе болады, белгілі бір процестерден кейін екі планета жүйеден бөлініп шығып, біреуі жұлдызға құлап, бір немесе екі планета ғана қалуы мүмкін. Жақын жерде тағы да басқа жұлдыз бар болып, жүйені сәл сілкіп әсер етуі мүмкін.

Экзожүйелердің аттарындағы "*Gliese*" деген префикс жұлдыздың Күнге жақын В. Глизе (1969) жұлдыздар каталогына кіретіндігін білдіреді. Глизе каталогы Күннен 25 пк-ға дейінгі қашықтықтағы жұлдыздарды қамтиды. "*HD*" префиксі жұлдыздың Генри Дрейпера (*Henry Draper catalogue*, 1918 Ì 1924) каталогына енетіндігін білдіреді. *Gliese 581*, *47 UMa*, *μ Arae* жүйелері физикалық қасиеттері жағынан Күн жүйесіне жақын болып келеді.

Белгілі экзожүйелердің ыстық Юпитерлер мен Мини Нептундар тәрізді гигант-планеталардың көбісінің орбиталары орталық жұлдызға жақын орналасқан. Орталық жұлдызға жақын орналасқан экзопланеталар әсіресе планета эволюциясының бастапқы этаптарында өте ықпалды ультракүлгін және рентгендік радиацияларға ұшырайды. Осындай әсерлер әсіресе *G*, *K* және *M* типті жұлдыздардың ішкі планеталарында қатты байқалады.

Эволюция кезінде жұлдыз массасын өзгертеді, және бір стадиядан келесі стадияға өту кезінде жұлдыз массасын көбірек жоғалтады. Жұлдыздардың массасының өзгеруі эволюциялық өзгерістердің әр кезеңінде Герцшпрунг-Рассел диаграммасы бойынша орын алады(8-сурет).

Hertzsprung-Russell diagram



© Encyclopædia Britannica, Inc.

8 сурет – Герцшпрунг-Рассел диаграммасы

Эволюциялық өзгерістің әр кезеңінде әртүрлі спектральді типті жұлдыздар үшін массаның шығын механизмі түрлі болады. Мысалға Күннің масса шығыны үлкен емес, ол күн желінің әсерінен жылына $3 \times 10^{-14} M_{\odot}$ шамасына тең [106].

Бақылау жұмыстарынан өмір сүруі бойынша жас болып келетін жұлдыздарда, мысалға *T Tau* осы шама жылына $10^{-8} M_{\odot}$ болып табылады. Спектральді типі *O* және *B* болып келетін температурасы жоғары жұлдыздарда, мысалға *Вольфа - Райе*, *PCyg*, массаның шығыны жылына $(10^{-8} - 10^{-5}) M_{\odot}$ шамасына дейін жетеді. Осы спектральді типті жұлдыздарда негізінен масса $\approx 30 M_{\odot}$ құрайды және өмір сүру уақыты $10^6 - 10^7$ жыл. Осындай уақыт интервалында жоғарыда келтірілгендей масса шығыны болуы эволюцияға айтарлықтай әсер етеді. Кейінгі спектральді класстағы жұлдыздардың да масса шығыны айтарлықтай. Мысалы, қызыл гиганттардың немесе сверхгиганттардың масса шығыны [107] бағалау бойынша жылына $(10^{-6} - 10^{-3}) M_{\odot}$ құрайды. Орталық жұлдыздың осындай айтарлықтай масса шығыны өзінің экзопланета жүйелерінің динамикалық эволюциясына айтарлықтай әсер етеді.

2-кестеде негізгі тізбектен кейінгі планеталық жүйелер эволюциясы кезінде жұлдыздар массасының өзгерісі келтірілген [108].

2 кесте – Негізгі тізбектен кейінгі планеталық жүйелер эволюциясы кезінде жұлдыздар массасының өзгерісі

MS stellar type	MS mass ($M_{\odot}$)	WD mass ($M_{\odot}$)	max AGB radius (AU)	max mass loss rate ($M_{\odot}/\text{yr}$)	max luminosity ($L_{\odot}$)	RGB time span (Myr)	AGB time span (Myr)	RGB mass loss/ AGB mass loss
B3	6.30	1.18	6.19	9.27×10^{-5}	66200	0.086	0.92	2.0×10^{-4}
B4	5.00	1.00	4.98	6.51×10^{-5}	46100	0.25	1.41	2.5×10^{-4}
B5	4.30	0.91	4.29	5.15×10^{-5}	35900	0.49	1.89	3.0×10^{-4}
B8	3.00	0.75	2.86	2.78×10^{-5}	18700	2.42	4.19	4.5×10^{-4}
A0	2.34	0.65	2.26	2.33×10^{-5}	12700	7.71	5.72	6.0×10^{-4}
A5	2.04	0.64	1.86	1.88×10^{-5}	9500	20.0	6.27	1.4×10^{-3}
F0	1.66	0.60	1.55	1.32×10^{-5}	7140	88.0	5.24	0.040
F5	1.41	0.57	1.35	9.56×10^{-6}	5800	220	5.08	0.11
G0	1.16	0.53	1.15	1.14×10^{-5}	4520	536	4.82	0.41
G2	1.11	0.53	1.11	7.44×10^{-6}	4300	621	4.77	0.57
G5	1.05	0.52	1.07	6.89×10^{-6}	4130	684	4.77	0.82
K0	0.90	0.51	0.92	2.07×10^{-7}	3590	888	5.01	4.14

3 АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІ

3.1 Абсолютті координаталар жүйесіндегі көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеуі

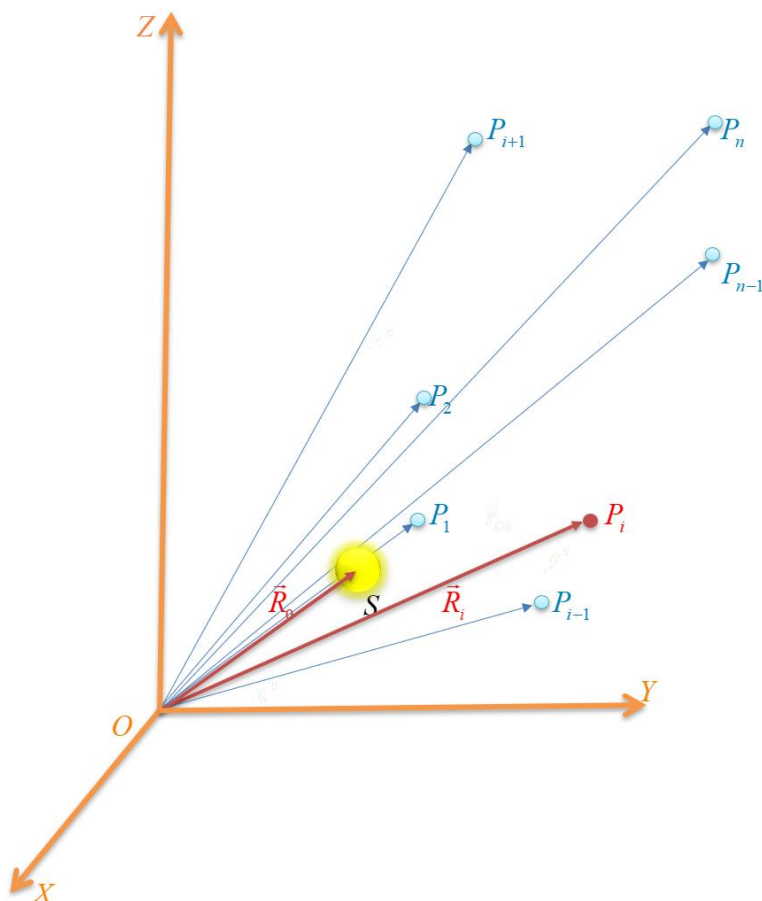
$Oxyz$ абсолютті координаталар жүйесінде айнымалы массалы:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \dots, \quad m_N = m_N(t) \quad (3.1)$$

және массалары әр түрлі жылдамдықта өзгертін [6]:

$$\frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.2)$$

Ньютон заңы бойынша өзара әсерлесетін S , P_1 , P_2 , ..., P_N еркін, сфералық $N+1$ денелер жүйесін қарастырайық (9-сурет).



9 сурет – $OXYZ$ абсолютті координаталар жүйесінде еркін $N+1$ денелер жүйесі. Сфералық денелер материалдық нүкте ретінде қарастырылған

Денелерді сфералық деп қарастыруымыздың себебі – сфералық дененің басқа денелерге әсер ететін гравитациялық күшін осы сфераның центрінде орналасқан материалдық нүктенің гравитациялық күшіне келтіруге болады.

Және бұл аспан денелерінің ең қарапайым моделі болып табылады. Демек, бұл есепті жеңілдетеді.

S центрлік дене біздің жағдайда планета жүйесінің орталық жұлдызы. S денесінің массасы m_0 . Планеталарды P_i арқылы белгілейміз, сәйкесінше массалары m_i . Массалардың өзгеру заңдылығын нақты және белгілі деп қарастырамыз. Планеталардың жұлдыздан қашықтығы бойынша орналасуы келесідей: P_i планетасы P_{i+1} планетасымен салыстырғанда ішкі планета, алайда P_{i-1} планетасымен салыстырғанда сыртқы планета болып табылады. Және эволюция үрдісінде планеталардың осылай орналасуы өзгеріссіз сақталады, демек планеталар орбиталары қиылыспайды. 9-суретте осы жүйе және олардың радиус-векторлары абсолютті координаталар жүйесінде келтірілген.

$Oxyz$ абсолютті координаталар жүйесінде массалары анизотропты түрде өзгеретін сфералық бейстационар $N+1$, ($N > 3$) денелердің ұйытқыған қозғалысын сипаттайтын Мещерский теңдеуі келесідей жазылады [81]:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = f m_i \sum_{j=0}^N \frac{m_j \vec{R}_{ij}}{R_{ij}^3} + \dot{m}_i \vec{V}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

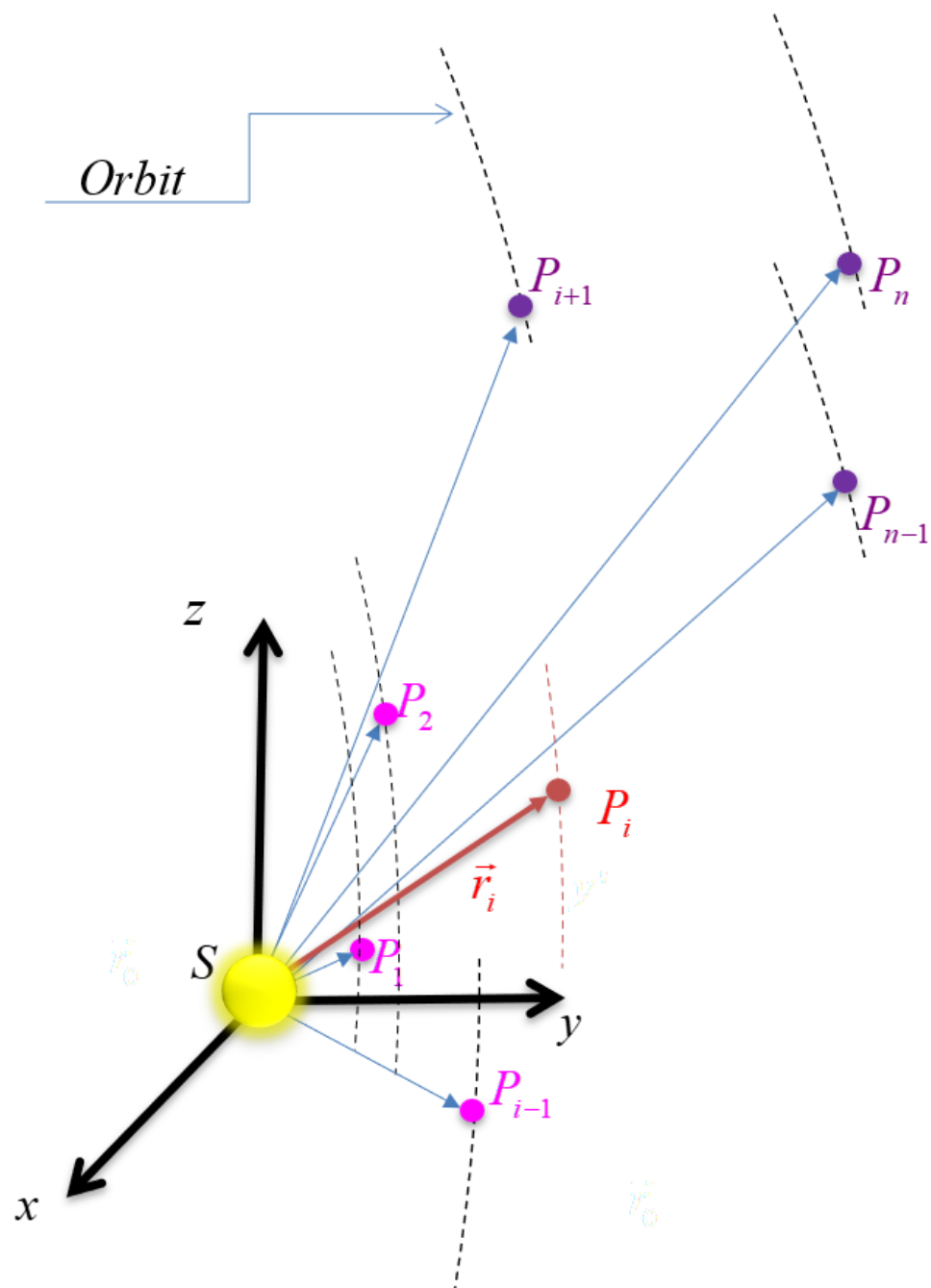
мұндағы, f - гравитациялық тұрақты, $\vec{R}_i$ - абсолютті координаталар жүйесіндегі сфералық денелердің радиус – векторлары, $\vec{R}_{ij}$ - денелердің центрлерінің өзара арақашықтығы, қосындыдағы «штрих» белгісі $i \neq j$ теңсіздігін білдіреді, $\vec{V}_i$ - бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің салыстырмалы жылдамдығы:

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{u}}_i - \dot{\vec{R}}_i, \quad (3.4)$$

мұндағы, $\dot{\vec{u}}_i$ - бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің абсолютті жылдамдығы, $\dot{\vec{R}}_i$ - бөлінетін (не қосылатын) бөлшектердің тасымал жылдамдығы.

3.2 Салыстырмалы координаталар жүйесіндегі көп дене мәселесінің қозғалыс теңдеуі

Абсолютті координаталар жүйесінен салыстырмалы координаталар жүйесіне көшеміз. $Sx'y'z'$ салыстырмалы координаталар жүйесінің өстері $Oxyz$ абсолютті координаталар жүйесінің сәйкес өстеріне өзара параллель болсын (10-сурет). Координаталар бас нүктесі орталық жұлдыздың массалар центрімен сәйкес келсін, яғни S нүктесінде орналассын.

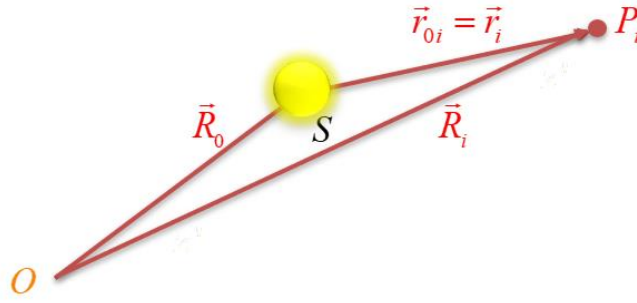


10 сурет – S_{xyz} салыстырмалы координаталар жүйесіндегі N денеден тұратын жүйе

Салыстырмалы координаталар жүйесінде қозғалыс теңдеулерін жазу үшін 11-суреттегі радиус-векторлардың қатынасын пайдаланамыз. Яғни, келесі белгілеулерді енгіземіз:

$$\vec{R}_{0i} = \vec{R}_i - \vec{R}_0 = \vec{r}_i. \quad (3.5)$$

мұндағы $\vec{R}_0$ - абсолютті координаталар жүйесіндегі орталық жұлдыздың радиус-векторы, $\vec{r}_i$ - салыстырмалы координаталар жүйесінің центрінен басталған P_i денесінің радиус-векторы.



11 сурет – Абсолютті және салыстырмалы координаталар жүйесінен зерттелініп отырған денеге дейінгі радиус-векторлар

Осылай, массалары анизотропты түрде өзгертін N планеталы жүйенің қозғалыс теңдеуін (3.3) салыстырмалы координаталар жүйесінде келесідей түрде өрнектейміз:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{V}_{0i} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (3.6)$$

Бір векторлық теңдеу үш скаляр теңдеуге пара-пар екендігі белгілі, N дененің орталық жұлдыздың массалар центріне қатысты дифференциалдық қозғалыс теңдеуінің (3.6) скаляр түрі келесідей:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} x_i + \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{V}_{0ix} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3} \right) \\ \ddot{y}_i &= -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} y_i + \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{V}_{0iy} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3} \right) \\ \ddot{z}_i &= -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} z_i + \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{V}_{0iz} + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

мұндағы, Δ_{ij} - i -ші және j -ші денелердің арақашықтығы

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.8)$$

(3.5) қатынасын ескере отырып, массалары анизотропты түрде өзгертін N дененің дифференциалды қозғалыс теңдеуін (3.6) келесідей түрде жаза аламыз:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{V}_i - \frac{\dot{m}_0}{m_0} \vec{V}_0 + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (3.9)$$

[11] жұмысында алынған (3.6) немесе (3.9) дифференциалдық қозғалыс теңдеулер жүйесі массалары анизотропты түрде өзгертін N планетаның орталық жұлдыз маңайындағы іргерілемелі қозғалысын толықтай сипаттайды.

Ал [109], [110] жұмыстарында осы қозғалыс теңдеулері массалары изотропты түрде өзгертін жағдайда қарастырылған. Массалар изотропты түрде өзгерген кезде қарастырылып отырған планеталар жүйесіне әсер ететін ішкі реактивті күштердің қосындысы нөлге тең, яғни

$$\sum \frac{\dot{m}_i}{m_i} \vec{v}_{oi} = 0 \quad (3.10)$$

Массаларының изотропты өзгерісі массаның сфералық-симметриялы түрде бөлінуін (сәулеленуін) білдіреді.

Егер аспан денелерінің сәулеленуі изотропты болса, онда реактивті күштер пайда болмайды, ал айнымалы массалы денелердің өзара әсерлесуін қарапайым бүкіләлемдік тартылыс күшімен сипаттауға болады.

Сонымен, массалары изотропты түрде өзгертін N планетаның салыстырмалы координаталар жүйесіндегі қозғалыс теңдеуі келесідей түрге ие болады:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i + f \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (i=1,2,\dots,n), \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (3.11)$$

Алайда, көп дене мәселесінің (3.6)-(3.9) немесе (3.11) автономды емес дифференциалды теңдеулер жүйесінің басқа жүйелерден өзгешелігі жалпы жағдайда бір де бір интегралы белгілі емес [81]. Осыған байланысты, қарастырылып отырған жүйенің динамикалық эволюциясы канондық ұйытқу теориясы әдістерімен зерттеледі [111].

3.3 Квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыс негізіндегі ұйытқу теориясы

Массалары әртүрлі қарқында өзгертін айнымалы массалы көп дене мәселесінің ең қарапайым түрі - үш дене мәселесі екендігі белгілі. Осы үш дене мәселесінің өзінде де массалардың таралып-жойылып (диссипация) кетуі күрделі есеп болып табылады. Есептің осылай қойылуында алғашқы классикалық он интеграл (энергия интегралы, массалар центрінің қозғалысының алты интегралы және қозғалыс мөлшері моменті сақталуының үш интегралы) анықталмайды [6].

Массалардың әртүрлі қарқында өзгеру әсерінен бір бүтін жүйенің энергиясы жойылады. Массалардың өзгеру заңдылығы белгілі және нақты деп алынғандықтан, жүйенің дифференциалдық теңдеулері тұйық болып табылады және қосымша еркіндік дәрежелері пайда болмайды. Алайда, қозғалыс

мөлшерінің, қозғалыс мөлшері моментінің және энергияның жойылуы (диссипация) әсерінен классикалық интегралдар сақталмайды.

Бүгінгі таңда гравитацияланатын планета және протопланеталы жүйелердің негізгі диссипативті факторлары – қарқынды эволюция (приливная эволюция), ядро мен мантияның үйкелісі және атмосфера мен аспан денесінің үйкелісі. Мысалы, Шолпан планетасының экзотикалық ілгерілемелі-айналмалы қозғалысын осы факторлармен түсіндіруге болады. Протопланеталы жүйелер бейстационар болып табылады [112], [113] және бұл маңызды диссипативті фактор.

Осындай мәселені зерттеу кезінде квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыс негізінде ұйытқу теориясын қолдануға болады.

Ұйытқу теориясын қолданудың тағы бір себебі, көп дене мәселесінің жалпы шешімін анықтау тұрақты масса кезінде де мүмкін емес.

Сонымен, дифференциалдық қозғалыс теңдеуі интегралданбайтын болғандықтан, бұл мәселе канондық ұйытқу теориясының шеңберінде бейстационар жүйе үшін құрылған әдістермен зерттеледі [6]. Егер N дененің өзара әсерлесуін ескермей, көп дене мәселесінің дифференциалдық теңдеулер жүйесіндегі ұйытқытушы функцияны нөлге теңестірсек, онда екі дене мәселесінің N өзара тәуелсіз теңдеулерін нөлдік жуықтауда аламыз. Оларды тұрақты масса кезінде оңай интегралдауға болады. Анықталған тәуелсіз теңдеулер – квазиконустық қима бойынша орталық жұлдыздың маңайында N дененің қозғалысын анықтайтын нақты шешімдер.

Квазиконустық қима бойынша денелердің апериодтық қозғалысын сипаттайтын айнымалы массалы екі дене мәселесінің осы анықталған нақты шешімдері нөлдік жуықтау ретінде қолданылады [12]. Қарастырылып отырған жүйеде орталық жұлдыздың массасы планеталардың массасынан әлде-қайда үлкен:

$$m_0 \gg m_i \quad (i=1, \dots, N). \quad (3.12)$$

Сондықтан олардың орбиталары аз ауытқулы квазиконустық қима болып табылады. Мұндағы ауытқу $N + 1$ денелердің өзара гравитациялық тартылуынан пайда болады. Осы факторлар ұйытқу функциясында анықталады.

3.4 Квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалыстың оскуляция элементтері арқылы жазылған қозғалыс теңдеуі

Ендігі кезекте изотропты жағдайдағы оскуляция элементтері арқылы жазылған қозғалыс теңдеуін қарастырайық.

$$\ddot{\vec{r}}_i + f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} \vec{r}_i = \vec{F}_i, \quad (3.13)$$

мұндағы

$$\gamma_i = \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)} = \gamma_i(t), \quad \vec{F}_i = \text{grad}_{\vec{r}_i} W_i \quad (3.14)$$

Ұйытқытушы функция келесідей жіктеледі:

$$W_i = W_{ci} + W_{gi}, \quad (3.15)$$

(3.15) өрнектегі екінші қосылғыш денелердің өзара ньютондық тартылуын сипаттайтын ұйытқытушы функция

$$W_{gi} = f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right), \quad (3.16)$$

Ал, (3.15) өрнектегі бірінші қосылғыш модельдік ұйытқытушы функция. Яғни, бұл бөлік теңдеуді интегралдауға мүмкіндік береді.

$$W_{ci} = -\frac{\ddot{\gamma}_i}{2\gamma_i} \vec{r}_i^2 \quad (3.17)$$

Жоғарыда айтылғандай, алынған (3.13)-салыстырмалы қозғалыс теңдеулері ұйытқы теориясын қолдануға ыңғайлы болып табылады [6]. Егер ұйытқытушы функция (3.15) нөлге тең болса, онда интегралданатын ұйытқымаған қозғалысты аламыз. Яғни, $w_i = 0$ кезінде (3.13)-теңдеу квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалысты сипаттайды [6], [7]

$$\ddot{\vec{r}}_i + f \frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3} \vec{r}_i - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i} \vec{r}_i = 0 \quad (3.18)$$

(3.18)-дифференциалдық теңдеулерді шешу тұрақты массалы классикалық екі дене мәселесін шешумен аналогты түрде іске асады

$$\begin{aligned} x_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \cos \varrho_i - \sin u_i \cdot \sin \varrho_i \cdot \cos i_i], \\ y_i &= \gamma_i \rho_i [\cos u_i \cdot \sin \varrho_i + \sin u_i \cdot \cos \varrho_i \cdot \cos i_i], \\ z_i &= \gamma_i \rho_i \sin u_i \cdot \sin i_i, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i [-\sin u_i \cos \Omega_i - \cos u_i \sin \Omega_i \cos i_i], \\
\dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i [-\sin u_i \sin \Omega_i + \cos u_i \cos \Omega_i \cos i_i], \\
\dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i [\cos u_i \sin i_i],
\end{aligned} \tag{3.20}$$

мұндағы

$$\rho_i = \frac{a_i(1-e_i^2)}{1+e_i \cos \theta_i}, \quad r_i = \gamma_i \rho_i, \quad u_i = \theta_i + \omega_i, \tag{3.21}$$

$$\dot{\rho}_i = \left(\frac{m_i(t)}{m_i(t_0) \gamma_i^3} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\mu_{i0}}}{\sqrt{p_i}} e_i \sin \theta_i, \quad \dot{u}_i = \left(\frac{m_i(t)}{m_i(t_0) \gamma_i^3} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{p_i}}{\rho_i^2}, \tag{3.22}$$

(3.19) - (3.22) u_i - ендік аргументінің аналогы, θ_i - нақты аномалияның аналогы, ω_i - перицентр аргументінің аналогы, a_i - үлкен жарты өстің аналогы, e_i - эксцентриситеттің аналогы, i_i - орбита көлбеулігінің аналогы, Ω_i - түйіндер сызығы бойлығының аналогы.

Тұрақты масса кезінде $\gamma = \gamma(t) = \text{const} = 1$ болады және (3.18)- (3.22) теңдеулері орталық дененің төңірегінде классикалық конустық қима бойынша қозғалыс жасайды. Масса айнымалы кезінде (3.18)-(3.22) теңдеулерінде уақыттан тәуелді $\gamma = \gamma(t)$ шамасының бар болуы конустық қиманы деформацияға ұшыратады және қозғалыс периодты болмайды. Сондықтан да, (3.18)-(3.22) теңдеулерінің шешімі квазиконустық қима бойынша апериодтық қозғалысты сипаттайды.

(3.19)-(3.22) шешімдерін бастапқы ұйытқымаған қозғалыс ретінде пайдаланамыз. Квазиэллиптикалық қозғалыс ($e_i < 1$) жағдайында, (3.19)-(3.22) дифференциалдық ұйытқымаған қозғалыс теңдеулерін интегралдағанда пайда болатын тұрақтылар арқылы, квазиэллиптикалық қозғалыстың алты элементін, Кеплер элементтерінің аналогтарын, анықтауға болады

$$a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i, \phi_i(\tau_i) \tag{3.23}$$

[6] жұмыста (3.23) элементтерін ұйытқымаған қозғалыс ретінде қолдана отырып, сәйкес ұйытқу теориясы құрылған. Бұл теорияны осы жұмыста кеңінен қолданамыз.

Квазиэллиптикалық қозғалыс $e_i < 1$ жағдайында орташа аномалия аналогының M_i уақыттан тәуелділігі

$$M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad (3.24)$$

массалар заңдылығының өзгеру есебінде анықталады. Мұндағы n_i - орташа қозғалыстың аналогы

$$n_i = \frac{\sqrt{\mu_{i0}}}{a_i^{3/2}} = \text{const}, \quad \mu_{i0} = f[m_0(t_0) + m_i(t_0)], \quad (3.25)$$

μ_{i0} - гравитациялық параметр, t_0 - бастапқы уақыт моменті. Сонымен қатар, (3.24)-өрнектегі $\phi_i(t)$ – келесі шаманың алғашқы функциясы

$$\frac{1}{\gamma_i^2(t)} = \left(\frac{m_0(t) + m_i(t)}{m_0(t_0) + m_i(t_0)} \right)^2. \quad (3.26)$$

(3.24)-өрнектегі $\phi_i(\tau_i)$ - перицентрден өту уақытының аналогы динамикалық элемент болып табылады. Мұндағы, τ_i – перицентрден өту уақыты.

Ұйытқыған қозғалыс кезінде орташа аномалия уақыт бойынша айнымалы болып табылады және сәйкес денелердің массалар өзгеру заңдылығынан тәуелді

$$\dot{M}_i = n_i \left(\frac{1}{\gamma_i^2(t)} \right) = n_i \left(\frac{m_0(t) + m_i(t)}{m_0(t_0) + m_i(t_0)} \right)^2. \quad (3.27)$$

Квазиэллиптикалық қозғалыс $e_i < 1$ жағдайында математикалық тұрғыдан, Кеплер теңдеуі орынды. Ол бізге координата мен жылдамдықты уақыт функциясы ретінде анықтауға мүмкіндік береді.

$$E_i - e_i \sin E_i = M_i. \quad (3.28)$$

Эксцентриситеттік аномалия аналогы E_i мен нақты аномалия аналогының θ_i арасында келесі қатынас орынды

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_i}{2} = \sqrt{\frac{1+e_i}{1-e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2} \quad (3.29)$$

Эксцентриситеттік аномалия аналогы мен нақты аномалия аналогы (3.28)-(3.29) формулаларына сәйкес массалар өзгеру заңдылығынан тәуелді.

3.5 Пуанкаре айнымалыларының екінші жүйесінің оскуляция аналогтары арқылы жазылған қозғалыс теңдеуі

Эволюциялық қозғалыс теңдеулерін алу үшін жаңа канондық айнымалыларға көшу қажет. Біздің жағдайымызда Пуанкаре канондық элементтердің екінші жүйесінің аналогтары $(\Lambda_i, \lambda_i, \xi_i, \eta_i, p_i, q_i)$ ыңғайлы болып табылады. Пуанкаре канондық элементтердің екінші жүйесінің аналогтары келесідей анықталады

$$\Lambda_i = \sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i}, \quad \lambda_i = l_i + \pi_i, \quad (3.30)$$

$$\xi_i = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i, \quad \eta_i = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} (1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i, \quad (3.31)$$

$$p_i = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \cos \Omega_i, \quad q_i = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}} \sqrt{a_i} \sqrt{1 - e_i^2} (1 - \cos i_i)} \sin \Omega_i. \quad (3.32)$$

мұндағы,

$$l_i = M_i = n_i [\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)], \quad \pi_i = \Omega_i + \omega_i. \quad (3.33)$$

N сфералық дененің Пуанкаре айнымалыларының екінші жүйесінің аналогтары (3.30)-(3.32) арқылы жазылған дифференциалдық қозғалыс теңдеуі келесідей канондық түрге ие:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

мұндағы Гамильтон функциясы

$$R_i^* = \frac{\mu_{i0}^2}{2\Lambda_i^2} \cdot \frac{1}{\gamma_i^2(t)} + W_i(t, \Lambda_i, \xi_i, p_i, \lambda_i, \eta_i, q_i). \quad (3.35)$$

Эксцентриситет аналогтары мен орбита жазықтығының көлбеулік аналогтары жеткілікті түрде кіші шама болған жағдайда

$$e_i \ll 1, \quad i_i \ll 1. \quad (3.36)$$

[12] жұмыста алынған ұйытқыған қозғалыстың канондық теңдеулері планета жүйелерінің динамикалық эволюциясын сипаттауға ыңғайлы болып табылады.

(3.34) канондық қозғалыс теңдеулерін келесідей қайта жазайық

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = \frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i}, \\
\dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \eta_i}, \\
\dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$w_i = 0$ кезінде (3.37)-теңдеуден $\Lambda_i, \eta_i, \xi_i, q_i, p_i$ канондық айнымалылар және $a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i$ орбита элементтерінің аналогтары тұрақты болып қалатынын, ал λ_i - орташа бойлық үдемелі уақыт функциясы болатындығын көре аламыз. Бұл дегеніміз, λ_i - орташа бойлық жылдам өзгеретін айнымалы, ал $\Lambda_i, \eta_i, \xi_i, q_i, p_i$ - баяу өзгеретін айнымалылар екендігін білдіреді.

4 АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНДЕГІ ҰЙЫТҚЫТУШЫ ФУНКЦИЯНЫ ҚАТАРҒА ЖІКТЕУ

4.1 Квазиконустық қима бойынша аperiodтық қозғалыстың оскуляция элементтері арқылы ұйытқытушы функцияны қатарға жіктеудің жалпы сұлбасы

Қозғалыс кезінде (3.36) шарты орындалады деп болжам жасайық, яғни денелер трек жазықтық маңайында кіші эксцентриситетті ұйытқыған квазиконустық қима бойынша қозғалады. Осы болжам кезінде (3.31)-(3.32) теңдеулеріндегі ξ_i, η_i, p_i, q_i канондық айнымалылар кіші шама болып табылады. (3.30)-(3.32) өрнектерінен келесі қатынастарды аламыз

$$e_i^2 = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{A_i} \left(1 - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{4A_i} \right) \quad (4.1)$$

$$\sin^2 i_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{A_i \sqrt{1 - e_i^2}} = \left(1 - \frac{p_i^2 + q_i^2}{4A_i \sqrt{1 - e_i^2}} \right) \quad (4.2)$$

(4.1)-(4.2) қатынастарында ξ_i, η_i айнымалылары және e_i эксцентриситет, сонымен қатар, p_i, q_i айнымалылары және i_i көлбеулік бірдей ретті (екінші ретті) шама болып табылады. Сондықтан да (3.37) ұйытқыған қозғалыс теңдеуінде w_i ұйытқытушы функцияны ξ_i, η_i, p_i, q_i айнымалылары бойынша дәрежелік қатарға жіктелген өрнегімен ауыстырып, ықшамдауға болады [114].

(3.37) ұйытқыған қозғалыс теңдеуінің оң жағын анық түрде жазу үшін (3.15) ұйытқытушы функцияны (3.30)-(3.32) оскуляция элементтері арқылы өрнектеу қажет. w_{ci} шамасын оскуляция элементтері арқылы өрнектеу қиындық тудырмайды, оның аналитикалық түрі белгілі [6]. Яғни $\vec{r}_i^2$ өрнегі келесідей жіктеледі:

$$\vec{r}_i^2 = \gamma_i^2 \vec{\rho}_i^2 = \gamma_i^2 \vec{a}_i^2 \left(\frac{\vec{\rho}_i}{\vec{a}_i} \right)^2$$

Осы қатарға жіктелген өрнектің екінші дәрежеге дейінгі мүшесін ескере отырып $w_{ci} = -\frac{\ddot{\gamma}_i}{2\gamma_i} \vec{r}_i^2$ өрнегіне қойсақ:

$$w_{ci} = -\frac{\gamma_i \ddot{\gamma}_i}{2} \vec{a}_i^2 \left(\frac{\vec{\rho}_i}{\vec{a}_i} \right)^2$$

Денелердің өзара ньютондық тартылуының w_{gi} күштік функциясын (3.30)-(3.32) оскуляция элементтері арқылы қатарға жіктеу айтарлықтай қиындық тудырады

$$W_{gi} = f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right). \quad (4.3)$$

Денелердің өзара ньютондық тартылуының күштік функциясының өрнегін (4.3) негізгі бөлікке және қосымша бөлікке жіктеп алу қажет:

$$\begin{aligned} W_{gi} &= f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right) = f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3} \right) = \\ &= f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{r_i \cdot r_k \cdot \cos \psi_{ik}}{r_k^3} \right) = f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f \sum_{k=1}^n m_k \left(r_i \cdot \left(\frac{1}{r_k^2} \right) \cdot \cos \psi_{ik} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Нәтижесінде (4.3) ұйытқытушы функцияның негізгі және қосымша бөлігін келесідей белгілеп алайық

$$W_{gi,main} = f \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right), \quad (4.5)$$

$$W_{gi,add} = -f \sum_{k=1}^n m_k \left(r_i \cdot \left(\frac{1}{r_k^2} \right) \cos(\psi_{ik}) \right) \quad (4.6)$$

Классикалық көп дене мәселесіндегідей [114], ұйытқытушы функцияның қосымша бөлігі (4.6) ғасырлық ұйытқу функциясының өрнегіне енбейді. Сондықтан, ғасырлық ұйытқудың дифференциалдық теңдеулерін (3.30)-(3.32) канондық оскуляция элементтері арқылы алу үшін ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігінің (4.5) аналитикалық өрнегін (3.30)-(3.32) канондық элементтер арқылы алсақ жеткілікті.

4.2 Ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігін қатарға жіктеу алгоритмі

Айта кететін жайт, $W_{gi,main}$ ұйытқытушы функциясын (4.5) қатарға жіктеу өте ауқымды символды есептеулерді қажет етеді. [7], [8], [9] жұмыстарда осындай есептеулер айнымалы массалы екі планеталы үш дене мәселесі үшін (3.36) кіші шамаларға қатысты екінші ретті дәлдікпен (қоса есептегенде) орындалған болатын.

Осы жұмыста қарастырылып отырған, массалары изотропты түрде өзгеретін n планеталы көп дене мәселесі үшін (4.5) ұйытқытушы функцияны қатарға жіктеу аналогты түрде дәл солай орындалады. Алайда көп дене мәселесін есептеу ауқымды болып келеді. [12] жұмысында *Wolfram Mathematica* символдық есептеу жүйесі көмегімен осы есепті шешудің әлде-қайда тиімді алгоритмі сипатталған.

Зерттелуші планетаға ішкі планеталардың әсерін білдіретін ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігін қатарға жіктеу сұлбасын келтірейік. $\vec{r}_{is} = \vec{r}_s - \vec{r}_i$ планеталардың өзара ара-қашықтығын квадраттап, келесі өрнекті аламыз:

$$r_{is}^2 = r_s^2 - 2\vec{r}_s \cdot \vec{r}_i + r_i^2 = r_s^2 - 2r_s r_i \cos \psi_{is} + r_i^2 = [\sigma_{is}^2] + [-2r_i r_s \tilde{\Psi}_{is}] = \sigma_{is}^2 \left[1 - \frac{2r_i r_s}{\sigma_{is}^2} \tilde{\Psi}_{is} \right] \quad (4.7)$$

мұндағы, ψ_{is} - екі радиус-вектор арасындағы бұрыш, $v_i = \theta_i + \pi_i$, $v_s = \theta_s + \pi_s$ - нақты бойлықтар, $\pi_i = \Omega_i + \omega_i$, $\pi_s = \Omega_s + \omega_s$ - перицентр бойлығы. (4.7) өрнегінде келесідей белгілеулер жасалған:

$$\sigma_{is}^2 = r_i^2 + r_s^2 - 2r_i r_s \cos(v_s - v_i) \quad (4.8)$$

$$\tilde{\Psi}_{is} = \cos \psi_{is} - \cos(v_s - v_i)$$

(4.7-4.8) өрнектерін ескере отырып, $1 / \Delta_{is}$ өрнегін келесідей аламыз:

$$\frac{1}{\Delta_{is}} = \frac{1}{\sigma_{is}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r_i r_s}{\sigma_{is}^2} \tilde{\Psi}_{is}}} \quad (4.9)$$

(4.9) өрнегінде $\frac{2r_i r_s}{\sigma_{is}^2} \tilde{\Psi}_{is} < 1$ шарты орындалуы тиіс. Бұл шарт орбиталардың қиылыспайтындығын білдіреді. Барлығымызға белгілі формуланы пайдаланып:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots \quad (4.10)$$

$1 / \Delta_{is}$ өрнегін келесідей жазамыз:

$$\frac{1}{\Delta_{is}} = \frac{1}{\sigma_{is}} + (r_i r_s \tilde{\Psi}_{is}) \frac{1}{\sigma_{is}^3} + \frac{3}{2} (r_i r_s \tilde{\Psi}_{is})^2 \frac{1}{\sigma_{is}^5} + \frac{5}{2} (r_i r_s \tilde{\Psi}_{is})^3 \frac{1}{\sigma_{is}^7} + \dots \quad (4.11)$$

Зерттелуші планетаға сыртқы планеталардың әсерін білдіретін ұйытқытушы функцияның негізгі бөлігіне енетін $1 / \Delta_{ik}$ өрнегін дәл осы сұлбаны пайдаланып аламыз:

$$\frac{1}{\Delta_{ik}} = \frac{1}{\sigma_{ik}} + (r_i r_k \tilde{\Psi}_{ik}) \frac{1}{\sigma_{ik}^3} + \frac{3}{2} (r_i r_k \tilde{\Psi}_{ik})^2 \frac{1}{\sigma_{ik}^5} + \frac{5}{2} (r_i r_k \tilde{\Psi}_{ik})^3 \frac{1}{\sigma_{ik}^7} + \dots \quad (4.12)$$

Енді (4.11) және (4.12) өрнектерін Пуанкаре айнымалыларымен жазу қажет. Ол үшін, ең алдымен, (3.31) қатынастарынан e_i және π_i айнымалыларын ξ_i және η_i арқылы өрнектейміз. Келесі қатынасты қолданып

$$\sqrt{1 - \sqrt{1 - e_i^2}} = \frac{e_i}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{e_i^2}{8} + \frac{7e_i^4}{128} + \dots \right), \quad (4.13)$$

e_i -дің орнына (4.1)-дегі өрнегін қойып, (3.31)-де ξ_i және η_i айнымалылары бойынша дәрежелік қатарға жіктеп, келесі өрнектерді анықтаймыз:

$$\begin{aligned} e_i \sin \pi_i &= -\frac{\eta_i}{\sqrt{A_i}} \left(1 - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{8A_i} + \dots \right), \\ e_i \cos \pi_i &= -\frac{\xi_i}{\sqrt{A_i}} \left(1 - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{8A_i} + \dots \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

(4.14)-жіктелген қатар *Series* функциясы арқылы төртінші ретті дәлдікпен іске асты. Қатарға жіктеу ξ_i және η_i екі айнымалы бойынша тәуелсіз түрде іске асатындықтан, алынған өрнекте ортақ қосындысы сегізінші дәрежеге дейін жететін $\xi_i^\nu \eta_i^k$, ($k, \nu = 0, 1, \dots, 4$) көбейтінді кездесуі мүмкін. Мысалға, $\xi_i^4 \eta_i^4$. Тек төртінші дәрежелі мүшелермен шектелу үшін жіктелетін функцияда $\eta_i \rightarrow \varepsilon \eta_i$ және $\xi_i \rightarrow \varepsilon \xi_i$ алмастыруларын орындап, функцияны ε айнымалысы бойынша $\varepsilon = 0$ нүкте маңайында төртінші ретке дейін *Series* функциясы арқылы қатарға жіктеу қажет. Нәтижесінде, ε айнымалысы бойынша төртінші ретті көпмүшелікті аламыз. ε^j ($j = 0, 1, \dots, 4$) кезінде коэффициенттер j -ші ретті $k + m = j$ шартын қанағаттандыратын $\xi_i^\nu \eta_i^k$, ($k, \nu = 0, 1, \dots, 4$) көбейтіндісінен ғана тұрады. Бұл есепте ε айнымалысы тек есептеуді оңайлату үшін ғана қосылғандықтан, соңында $\varepsilon = 1$ теңестірсек жеткілікті.

(4.2) өрнегін ескере отырып, (3.32) теңдеуінен ξ_i, η_i және p_i, q_i айнымалыларының дәрежелері бойынша қатарға жіктеу жұмыстарын жасаймыз:

$$\begin{aligned} \sin i_i \sin \Omega_i &= -\frac{q_i}{\sqrt{A_i}} \left(1 - \frac{p_i^2 + q_i^2}{8A_i} + \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{4A_i} \right), \\ \sin i_i \cos \Omega_i &= -\frac{p_i}{\sqrt{A_i}} \left(1 - \frac{p_i^2 + q_i^2}{8A_i} + \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{4A_i} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ескерте кететін жайт, (4.14)-(4.15) қатынастары $e_i, \pi_i, i_i, \Omega_i$ айнымалыларының емес, (3.19) өрнегіне енетін $e_i \sin \pi_i$, $e_i \cos \pi_i$, $\sin i_i \sin \Omega_i$, $\sin i_i \cos \Omega_i$ көбейтінділерінің ξ_i, η_i және p_i, q_i бойынша жіктелген дәрежелік қатары.

(3.19) өрнегінде $e_i, \omega_i, i_i, \Omega_i$ айнымалыларынан басқа θ_i нақты аномалияның аналогы бар, демек бұл айнымалыны да Пуанкаре элементтері арқылы өрнектеу қажет. Ол үшін (3.28) Кеплер теңдеуін пайдаланып, $e_i \ll 1$ кезінде E_i эксцентриситеттік аномалия аналогын жинақталатын дәрежелік қатар түрінде анықтаймыз [114]:

$$E_i = M_i + e_i \sin M_i + \frac{e_i^2}{2} \sin(2M_i) + \dots \quad (4.16)$$

Series функциясы есептеуді оңайлатады және кез-келген қажетті дәлдікпен дәрежелік қатарға жіктеуді іске асыра алады. (4.16) қатарының коэффициенттерін e_i бойынша n -ретті дәлдікпен анықтау үшін $solE[n]$ функциясын қолдануға болады:

$$\begin{aligned} solE[n_] &:= w - e_i \sin[w] - M_i/w \rightarrow \\ Sum[e_i^k w_k, \{k, 0, n\}] / &Series[\#, \{e_i, 0, n\}] \& / / \\ Normal / &Collect[\#, e_i, Simplify] \&; \end{aligned}$$

Мысалға $solE[3]$ командасын пайдалансақ, келесі нәтижені аламыз:

$$\begin{aligned} -M_i + w_0 + e_i(-\sin[w_0] + w_1) + e_i^2(-\cos[w_0]w_1 + w_2) + \\ + e_i^3\left(\frac{1}{2}\sin[w_0]w_1^2 - \cos[w_0]w_2 + w_3\right) \end{aligned}$$

Coefficient функциясын пайдалану арқылы, алынған өрнектен e_i^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) кезінде коэффициенттерді белгілеп, нөлге теңестіріп, тендеулер жүйесін аламыз. Нәтижесінде (4.16) қатарынан w_k айнымалысының коэффициенттерін анықтаймыз.

Есептеу дәлдігін арттыру ауқымды өрнекке алып келетіндіктен, ξ_i, η_i және p_i, q_i айнымалылары бойынша екінші ретті дәлдікпен шектелеміз. (4.16)-ны қолданып, келесі өрнекті анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \cos E_i &= \cos M_i - e_i \sin^2 M_i - \frac{3e_i^2}{2} \cos M_i \sin^2 M_i, \\ \sin E_i &= \sin M_i + \frac{e_i}{2} \sin(2M_i) + \frac{e_i^2}{8} (3 \sin(3M_i) - \sin M_i). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Нақты аномалия аналогы мен эксцентриситеттік аномалия аналогының байланысын көрсететін (3.29) өрнекті пайдаланып, келесі өрнекті аламыз:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= \frac{\cos E_i - e_i}{1 - e_i \cos E_i} = \cos M_i - e_i(1 - \cos(2M_i)) + \frac{9}{8} e_i^2 (\cos(3M_i) - \cos M_i), \\ \sin \theta_i &= \frac{\sin E_i \sqrt{1 - e_i^2}}{1 - e_i \cos E_i} = \sin M_i + e_i \sin(2M_i) + \frac{e_i^2}{8} (9 \sin(3M_i) - 7 \sin M_i). \end{aligned} \quad (4.18)$$

(3.29), (3.30), (3.33), (4.1), (4.14) және (4.17) өрнектерін ескере отырып және қажетті алмастыруларды және қатарға жіктеулерді іске асырып, $\frac{\bar{p}_i}{\bar{a}_i}$ өрнегін келесі түрде қайта жазамыз:

$$\frac{\rho_i}{a_i} = 1 - e_i \cos E_i = 1 + \frac{\eta_i \sin \lambda_i}{\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\xi_i \cos \lambda_i}{\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\eta_i^2}{2\Lambda_i} (1 + \cos(2\lambda_i)) + \frac{\xi_i^2}{2\Lambda_i} (1 - \cos(2\lambda_i)) + \frac{\eta_i \xi_i}{\Lambda_i} \sin(2\lambda_i). \quad (4.19)$$

Нәтижесінде, (4.1)-(4.2) және (4.13)-(4.19) қатарларын пайдаланып, p_i денесінің декарттық координаталары үшін ξ_i, η_i және p_i, q_i Пуанкаре айнымалылары бойынша екінші ретті дәлдікпен (3.19) өрнегін келесідей түрде анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \frac{X_i}{\gamma_i a_i} &= \cos \lambda_i - \frac{\xi_i}{2\sqrt{\Lambda_i}} (3 - \cos(2\lambda_i)) - \frac{\eta_i}{2\sqrt{\Lambda_i}} \sin(2\lambda_i) + \frac{3\xi_i^2}{8\Lambda_i} (\cos(3\lambda_i) - \cos \lambda_i) - \\ &- \frac{\xi_i \eta_i}{4\Lambda_i} (3 \sin(3\lambda_i) + \sin \lambda_i) - \frac{\eta_i^2}{8\Lambda_i} (3 \cos(3\lambda_i) - 5 \cos \lambda_i) - \frac{p_i q_i}{2\Lambda_i} \sin \lambda_i - \frac{q_i^2}{2\Lambda_i} \cos \lambda_i, \\ \frac{Y_i}{\gamma_i a_i} &= \sin \lambda_i + \frac{\eta_i}{2\sqrt{\Lambda_i}} (3 + \cos(2\lambda_i)) + \frac{\xi_i}{2\sqrt{\Lambda_i}} \sin(2\lambda_i) - \frac{3\eta_i^2}{8\Lambda_i} (\sin(3\lambda_i) + \sin \lambda_i) + \\ &+ \frac{\xi_i \eta_i}{4\Lambda_i} (3 \cos(3\lambda_i) - \cos \lambda_i) + \frac{\xi_i^2}{8\Lambda_i} (3 \sin(3\lambda_i) - 5 \sin \lambda_i) - \frac{p_i q_i}{2\Lambda_i} \cos \lambda_i - \frac{p_i^2}{2\Lambda_i} \sin \lambda_i, \\ \frac{Z_i}{\gamma_i a_i} &= \frac{p_i}{\sqrt{\Lambda_i}} \sin \lambda_i + \frac{q_i}{\sqrt{\Lambda_i}} \cos \lambda_i + \frac{\xi_i p_i}{2\Lambda_i} \sin(2\lambda_i) - \frac{\xi_i q_i}{2\Lambda_i} (3 - \cos(2\lambda_i)) + \\ &+ \frac{\eta_i p_i}{2\Lambda_i} (3 + \cos(2\lambda_i)) - \frac{\eta_i q_i}{2\Lambda_i} \sin(2\lambda_i). \end{aligned} \quad (4.20)$$

(3.19), (4.19) және (4.20) өрнектерін пайдаланып, *Series* функциясын қолданып, w_i ұйытқытушы функциясын қатарға жіктеу кезінде қолданылатын келесі өрнектер анықталады [115]:

$$\frac{r_i^2}{\gamma_i^2 a_i^2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\Lambda_i}} (\eta_i \sin \lambda_i - \xi_i \cos \lambda_i) + \frac{\eta_i^2}{2\Lambda_i} (3 + \cos(2\lambda_i)) + \frac{\eta_i \xi_i}{\Lambda_i} \sin(2\lambda_i) + \frac{\xi_i^2}{2\Lambda_i} (3 - \cos(2\lambda_i)), \quad (4.21)$$

$$\frac{\gamma_i^3 a_i^3}{r_i^3} = 1 - \frac{3\eta_i}{\sqrt{\Lambda_i}} \sin \lambda_i + \frac{3\xi_i}{\sqrt{\Lambda_i}} \cos \lambda_i + \frac{3\eta_i^2}{2\Lambda_i} (1 - 3 \cos(2\lambda_i)) - \frac{9\eta_i \xi_i}{\Lambda_i} \sin(2\lambda_i) + \frac{3\xi_i^2}{2\Lambda_i} (1 + 3 \cos(2\lambda_i)). \quad (4.22)$$

және

$$\frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{a_i a_j \gamma_i \gamma_j} = \cos(\lambda_i - \lambda_j) + \frac{\eta_i}{2\sqrt{\Lambda_i}} (3 \sin \lambda_j - \sin(2\lambda_i - \lambda_j)) + \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}} (3 \sin \lambda_i + \sin(\lambda_i - 2\lambda_j)) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi_i}{2\sqrt{\Lambda_i}}(3\cos\lambda_j - \cos(2\lambda_i - \lambda_j)) - \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3\cos\lambda_i - \cos(\lambda_i - 2\lambda_j)) - \frac{\eta_i^2}{4\Lambda_i}\cos\lambda_i(3\cos(2\lambda_i - \lambda_j) + \cos\lambda_j) - \\
& -\frac{\eta_j^2}{4\Lambda_j}\cos\lambda_j(3\cos(\lambda_i - 2\lambda_j) + \cos\lambda_i) - \frac{\xi_i^2}{4\Lambda_i}\sin\lambda_i(3\sin(2\lambda_i - \lambda_j) + \sin\lambda_j) + \\
& + \frac{\xi_j^2}{4\Lambda_j}\sin\lambda_j(3\sin(\lambda_i - 2\lambda_j) - \sin\lambda_i) + \frac{\eta_i\eta_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(9 + 3\cos(2\lambda_i) + \cos(2(\lambda_i - \lambda_j)) + 3\cos(2\lambda_j)) + \\
& + \frac{\xi_i\xi_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(9 - 3\cos(2\lambda_i) + \cos(2(\lambda_i - \lambda_j)) - 3\cos(2\lambda_j)) - \frac{\eta_i\xi_i}{4\Lambda_i}(3\sin(3\lambda_i - \lambda_j) + \sin(\lambda_i + \lambda_j)) + \\
& + \frac{\eta_j\xi_j}{4\Lambda_j}(3\sin(\lambda_i - 3\lambda_j) - \sin(\lambda_i + \lambda_j)) + \frac{\eta_i\xi_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(3\sin(2\lambda_i) + 3\sin(2\lambda_j) - \sin(2(\lambda_i - \lambda_j))) + \\
& + \frac{\eta_j\xi_i}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(3\sin(2\lambda_i) + 3\sin(2\lambda_j) + \sin(2(\lambda_i - \lambda_j))) - \frac{1}{2\Lambda_i}(q_i^2\cos\lambda_i\cos\lambda_j + p_i^2\sin\lambda_i\sin\lambda_j) - \\
& - \frac{1}{2\Lambda_j}(q_j^2\cos\lambda_i\cos\lambda_j + p_j^2\sin\lambda_i\sin\lambda_j) - \frac{q_i p_i}{2\Lambda_i}\sin(\lambda_i + \lambda_j) - \frac{q_j p_j}{2\Lambda_j}\sin(\lambda_i + \lambda_j) + \\
& + \frac{q_i p_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_i\sin\lambda_j + \frac{q_j p_i}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_j\sin\lambda_i + \frac{q_i q_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_i\cos\lambda_j + \frac{p_i p_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\sin\lambda_i\sin\lambda_j. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

(4.21)-(4.23) өрнектерін және келесі қатынасты қолданып

$$\Delta_{ij} = r_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j},$$

Δ_{ij} -ді есептейміз. Нәтижесінде P_i және P_j денелерінің гравитациялық өзара әсерлесуімен байланысты ұйытқуды сипаттайтын $1/\Delta_{ij}$ өрнегінің қатарға жіктелуін анықтаймыз (Қосымша А). Алынған нәтиже бөлімдерінде $\sin(k\lambda_i)$, $\cos(k\lambda_i)$, $\sin(k\lambda_i \pm v\lambda_j)$, және $\cos(k\lambda_i \pm v\lambda_j)$ ($k, v = 1, 2, 3, \dots$) тригонометриялық функциялары бар, ал алымында Δ_{ij} , Δ_{ij}^3 , және Δ_{ij}^5 өрнектері бар, өте ауқымды бөлшек түріндегі өрнек, сонымен қатар коэффициенттері λ_i орташа бойлық бойынша периодты функция болып табылатын ξ_i, η_i және p_i, q_i Пуанкаре айнымалылары бойынша екінші ретті көпмүшелік болып табылады, мұндағы

$$\Delta_{ij} = (a_i^2 \gamma_i^2 + a_j^2 \gamma_j^2 - 2a_i a_j \gamma_i \gamma_j \cos(\lambda_i - \lambda_j))^{1/2}.$$

$1/\Delta_{ij}$ өрнегі 1052 n қосылғыштан тұрады. n планеталы мәселе үшін планеталардың өзара ара-қашықтығының Δ_{ij} саны келесі формуламен өрнектеледі: $n(n-1)/2$.

Сонымен қатар, (4.19) өрнегін ескере отырып, w_{ci} өрнегін келесідей жазамыз

$$w_{ci} = -\frac{\gamma_i \ddot{\gamma}_i}{2} \frac{\Lambda_i^4}{\mu_{i0}^2} \left[1 + \frac{\eta_i \sin \lambda_i}{\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\xi_i \cos \lambda_i}{\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\eta_i^2}{2\Lambda_i} (1 + \cos(2\lambda_i)) + \frac{\xi_i^2}{2\Lambda_i} (1 - \cos(2\lambda_i)) + \frac{\eta_i \xi_i}{\Lambda_i} \sin(2\lambda_i) \right] \quad (4.24)$$

4.3 Ұйытқытушы функцияның ғасырлық бөлігі

Қатарға жіктеулерді орындап, оны ұйытқытушы функцияның өрнегіне қойып, қажетті ықшамдауларды орындап, ұйытқытушы функцияның өрнегін Пуанкаре айнымалыларына қатысты екінші ретті көпмүшелік түрінде алынды. Үлкен уақыт интервалындағы орбита параметрлерінің эволюциясын зерттейтін болғандықтан, w_i ұйытқытушы функцияны λ_i орташа бойлық бойынша орташалау арқылы дененің орбитальді қозғалысымен байланысты қысқа периодты ұйытқуларды жою қажет [6]. w_i көпмүшелігін орташалау келесі интегралды орындау болып табылады:

$$w_i^{(sec)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} d\lambda_1 \dots \int_0^{2\pi} d\lambda_N w_i. \quad (4.25)$$

w_{ci} ұйытқытушы функцияның ғасырлық бөлігі келесідей өрнекке ие

$$w_{ci}^{(sec)} = -\frac{\gamma_i \ddot{\gamma}_i}{2} \frac{\Lambda_i^4}{\mu_{i0}^2} \left[1 + \frac{1}{2\Lambda_i} (\eta_i^2 + \xi_i^2) \right] \quad (4.26)$$

w_i ұйытқытушы функция ауқымды қосындыдан тұратындықтан, барлық қосындыларды қарастырылып отырылған дене үшін λ_s ішкі планеталардың және λ_k сыртқы планеталардың орташа бойлығы бойынша интегралдауға келтіреміз. Нәтижесінде ұйытқытушы функцияның ғасырлық бөлігін келесідей аламыз:

$$\begin{aligned} w_i^{(sec)} = & f \sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{A_0^{is}}{2} + \Pi_{ii}^{is} \frac{\eta_i^2 + \xi_i^2}{2\Lambda_i} + \Pi_{is}^{is} \frac{\eta_i \eta_s + \xi_i \xi_s}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} + \Pi_{ss}^{is} \frac{\eta_s^2 + \xi_s^2}{2\Lambda_s} - B_1^{is} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2}{8\Lambda_i} - \frac{p_i p_s + q_i q_s}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} + \frac{p_s^2 + q_s^2}{8\Lambda_s} \right) \right) + \\ & + f \sum_{k=i+1}^n m_k \left(\frac{A_0^{ik}}{2} + \Pi_{ii}^{ik} \frac{\eta_i^2 + \xi_i^2}{2\Lambda_i} + \Pi_{ik}^{ik} \frac{\eta_i \eta_k + \xi_i \xi_k}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} + \Pi_{kk}^{ik} \frac{\eta_k^2 + \xi_k^2}{2\Lambda_k} - B_1^{ik} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2}{8\Lambda_i} - \frac{p_i p_k + q_i q_k}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} + \frac{p_k^2 + q_k^2}{8\Lambda_k} \right) \right) - \\ & - \frac{\gamma_i \ddot{\gamma}_i \Lambda_i^4}{2\mu_{i0}^2} \left(1 + \frac{3}{2\Lambda_i} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

мұнда, келесі белгілеулер ішкі планеталардың әсерін білдіреді ($s < i$):

$$\begin{aligned}\Pi_{ii}^{is} &= -\frac{3\alpha_{is}}{4}B_0^{is} - \frac{1}{2}B_1^{is} + \frac{15+6\alpha_{is}^2}{8}C_0^{is} - \frac{3\alpha_{is}}{2}C_1^{is} - \frac{9}{8}C_2^{is} \\ \Pi_{is}^{is} &= \frac{1}{8}(9B_0^{is} + B_2^{is}) - \frac{9(1+\alpha_{is}^2)}{8\alpha_{is}}C_0^{is} + \frac{21}{16}C_1^{is} + \frac{3(1+\alpha_{is}^2)}{8\alpha_{is}}C_2^{is} + \frac{3}{16}C_3^{is} \\ \Pi_{ss}^{is} &= -\frac{3}{4\alpha_{is}}B_0^{is} - \frac{1}{2}B_1^{is} + \frac{15\alpha_{is}^2+6}{8\alpha_{is}^2}C_0^{is} - \frac{3}{2\alpha_{is}}C_1^{is} - \frac{9}{8}C_2^{is}\end{aligned}\quad (4.28)$$

Осы өрнектердегі Лаплас коэффициенттері $A_0^{ij}, B_0^{ij}, B_1^{ij}, B_2^{ij}, C_0^{ij}, C_1^{ij}, C_2^{ij}, C_3^{ij}$ ($i \neq j$) рекуррентті қатынастармен өзара байланысты және *Wolfram Mathematica* пакетінің көмегімен бірінші ретті және екінші ретті эллиптикалық интегралдар арқылы өрнектеледі.

$$\begin{aligned}A_0^{is} &= \frac{4}{\pi a_i \gamma_i [\tau] (1+\alpha_{is})} \text{EllipticK} \left[\frac{4\alpha_{is}}{(1+\alpha_{is})^2} \right] \\ A_1^{is} &= -\frac{2}{\pi a_i \gamma_i [\tau] \alpha_{is}} \text{EllipticE} \left[\frac{4\alpha_{is}}{(1+\alpha_{is})^2} \right] (1+\alpha_{is}) + \frac{2}{\pi a_i \gamma_i [\tau] \alpha_{is} (1+\alpha_{is})} \text{EllipticK} \left[\frac{4\alpha_{is}}{(1+\alpha_{is})^2} \right] (1+\alpha_{is}^2)\end{aligned}\quad (4.29)$$

Лаплас коэффициенттері келесі рекуррентті қатынастар негізінде (4.29) өрнегінен тәуелді:

$$\begin{aligned}A_\nu^{is} &= \frac{2(\nu-1)}{2\nu-1} \left(\alpha_{is} + \frac{1}{\alpha_{is}} \right) A_{\nu-1}^{is} - \frac{2\nu-3}{2\nu-1} A_{\nu-2}^{is}, \quad \nu \geq 2 \\ B_\nu^{is} &= \frac{(2\nu+1)\alpha_{is}(1+\alpha_{is}^2)}{(1-\alpha_{is}^2)^2} A_\nu^{is} - \frac{2\alpha_{is}^2(2\nu+1)}{(1-\alpha_{is}^2)^2} A_{\nu+1}^{is}, \quad \nu \geq 0 \\ C_\nu^{is} &= \frac{(2\nu+3)\alpha_{is}(1+\alpha_{is}^2)}{3(1-\alpha_{is}^2)^2} B_\nu^{is} - \frac{2\alpha_{is}^2(2\nu-1)}{3(1-\alpha_{is}^2)^2} B_{\nu+1}^{is}, \quad \nu \geq 0\end{aligned}\quad (4.30)$$

Ішкі планеталар мен қарастырылып отырған планетаның орбиталарының қиылыспайтындығы шарты орындалуы қажет:

$$\alpha_{is} = \frac{\gamma_s a_s}{\gamma_i a_i} = \alpha_{is}(t) < 1, \quad (4.31)$$

(4.27) өрнектерінде келесі белгілеулер сыртқы планеталардың әсерін білдіреді ($i < k$)

$$\Pi_{ii}^{ik} = -\frac{3\alpha_{ik}}{4}B_0^{ik} - \frac{1}{2}B_1^{ik} + \frac{15+6\alpha_{ik}^2}{8}C_0^{ik} - \frac{3\alpha_{ik}}{2}C_1^{ik} - \frac{9}{8}C_2^{ik}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{ik}^{ik} &= \frac{1}{8}(9B_0^{ik} + B_2^{ik}) - \frac{9(1 + \alpha_{ik}^2)}{8\alpha_{ik}}C_0^{ik} + \frac{21}{16}C_1^{ik} + \frac{3(1 + \alpha_{ik}^2)}{8\alpha_{ik}}C_2^{ik} + \frac{3}{16}C_3^{ik} \\ \Pi_{kk}^{ik} &= -\frac{3}{4\alpha_{ik}}B_0^{ik} - \frac{1}{2}B_1^{ik} + \frac{15\alpha_{ik}^2 + 6}{8\alpha_{ik}^2}C_0^{ik} - \frac{3}{2\alpha_{ik}}C_1^{ik} - \frac{9}{8}C_2^{ik}\end{aligned}\quad (4.32)$$

(4.32) өрнектеріндегі Лаплас коэффициенттері I текті және II текті эллиптикалық интегралдар арқылы жазылады:

$$\begin{aligned}A_0^{ik} &= \frac{4}{\pi a_i \gamma_i [\tau] (1 + \alpha_{ik})} \text{EllipticK} \left[\frac{4\alpha_{ik}}{(1 + \alpha_{ik})^2} \right] \\ A_1^{ik} &= -\frac{2}{\pi a_i \gamma_i [\tau] \alpha_{ik}} \text{EllipticE} \left[\frac{4\alpha_{ik}}{(1 + \alpha_{ik})^2} \right] (1 + \alpha_{ik}) + \frac{2}{\pi a_i \gamma_i [\tau] \alpha_{ik} (1 + \alpha_{ik})} \text{EllipticK} \left[\frac{4\alpha_{ik}}{(1 + \alpha_{ik})^2} \right] (1 + \alpha_{ik}^2)\end{aligned}\quad (4.33)$$

Лаплас коэффициенттері келесі рекуррентті қатынастар негізінде (4.33) өрнегінен тәуелді:

$$\begin{aligned}A_\nu^{ik} &= \frac{2(\nu-1)}{2\nu-1} \left(\alpha_{ik} + \frac{1}{\alpha_{ik}} \right) A_{\nu-1}^{ik} - \frac{2\nu-3}{2\nu-1} A_{\nu-2}^{ik}, \quad \nu \geq 2 \\ B_\nu^{ik} &= \frac{(2\nu+1)\alpha_{ik}(1+\alpha_{ik}^2)}{(1-\alpha_{ik}^2)^2} A_\nu^{ik} - \frac{2\alpha_{ik}^2(2\nu+1)}{(1-\alpha_{ik}^2)^2} A_{\nu+1}^{ik}, \quad \nu \geq 0 \\ C_\nu^{ik} &= \frac{(2\nu+3)\alpha_{ik}(1+\alpha_{ik}^2)}{3(1-\alpha_{ik}^2)^2} B_\nu^{ik} - \frac{2\alpha_{ik}^2(2\nu-1)}{3(1-\alpha_{ik}^2)^2} B_{\nu+1}^{ik}, \quad \nu \geq 0\end{aligned}\quad (4.34)$$

Сыртқы планеталар мен қарастырылып отырған планетаның орбиталарының қиылыспайтындығы шарты орындалуы қажет:

$$\alpha_{ik} = \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_k a_k} = \alpha_{ik}(t) < 1, \quad (4.35)$$

Егер ұйытқытушы қозғалыстың канондық теңдеулер жүйесінде w_i ұйытқытушы функцияның орнына оның орташаланған түрін (3.19) қоятын болсақ, онда ғасырлық ұйытқу теңдеулерін аламыз. Ғасырлық ұйытқу теңдеулері үлкен уақыт интервалында орбита параметрлерін анықтайды.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = \frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i^{(\text{sec})}}{\partial \Lambda_i}, \quad \dot{\Lambda}_i = 0, \\ \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i^{(\text{sec})}}{\partial \xi_i}, \quad \dot{\xi}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i^{(\text{sec})}}{\partial \eta_i}, \\ \dot{q}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i^{(\text{sec})}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i^{(\text{sec})}}{\partial q_i}.\end{aligned}\quad (4.36)$$

(4.36) өрнегіндегі ғасырлық ұйытқытушы функцияны қысқа түрде келесідей белгілесек болады:

$$W_i^{(sec)} = W_{is,\Gamma\Pi}^{(sec)} + W_{ik,\Gamma\Pi}^{(sec)} + W_{ri}^{(sec)} \quad (4.37)$$

(4.36)-өрнектен келесі интеграл анықталатындығы бірден көрініп тұр:

$$\Lambda_i = const \quad \text{немесе} \quad a_i = const \quad (4.38)$$

λ_i орташа бойлық басқа канондық айнымалылар анықталғаннан кейін есептеледі.

Сонымен, (4.36) дифференциалдық теңдеулер жүйесі келесі канондық теңдеулер жүйесіне азаяды:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i &= -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial \eta_i}, \\ \dot{q}_i &= -\frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial W_i^{(sec)}}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (4.39)$$

Егер (4.5) ұйытқытушы функциясын қатарға жіктеуде (3.36) кіші шамаларына қатысты екінші ретті дәлдікпен (қоса есептегенде) шектелсек, онда (4.39) теңдеулер жүйесі сызықты автономды емес жүйе болып табылады. Сонымен қатар, оскуляция элементтерінің әртүрлі жүйелерінің өзара байланысуының жуық формулалары келесідей түрге ие

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos \pi_i, & \eta_i &= -\sqrt{\Lambda_i} e_i \sin \pi_i, \\ p_i &= \sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \cos \Omega_i, & q_i &= -\sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \sin \Omega_i, \\ \Lambda_i e_i^2 &= \xi_i^2 + \eta_i^2, & \operatorname{tg} \pi_i &= -\eta_i / \xi_i, \\ \Lambda_i \sin^2 i_i &= p_i^2 + q_i^2, & \operatorname{tg} \Omega_i &= -q_i / p_i. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Сонда, бірінші кезекте, алынған канондық теңдеулер жүйесінің өзі (4.40) екі жеке кіші жүйеге жіктеліп жазылады [7]. Бірінші жүйе орбита пішінін анықтайтын элементтер (ξ_i, η_i) үшін ғасырлық ұйытқу теңдеулер жүйесі. Екінші жүйе орбитаның кеңістікте орналасуын анықтайтын элементтер (p_i, q_i) үшін ғасырлық ұйытқу теңдеулер жүйесі. (4.39) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің (4.40) жуықтаулары арқылы сызықты болуы қарастырылып отырған есептің қойылымында ғасырлық ұйытқудың автономды емес канондық дифференциалдық теңдеулер жүйесін зерттеуді айтарлықтай жеңілдетеді.

Пуанкаре элементтерінің ғасырлық ұйытқуы $4N$ күрделі коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде анықталады.

5 ПУАНКАРЕНІҢ ЕКІНШІ ЖҮЙЕСІНІҢ ОСКУЛЯЦИЯ АНАЛОГТАРЫ АРҚЫЛЫ ЖАЗЫЛҒАН АЙНЫМАЛЫ МАССАЛЫ КӨП ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНІҢ ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕРІ

5.1 Эволюциялық теңдеулер

Нәтижесінде эволюциялық теңдеулер келесідей алынды:

$$\dot{\xi}_i = f \sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{\Pi_{is}^{is}}{\Lambda_i} \eta_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \eta_s \right) + f \sum_{k=i+1}^n m_k \left(\frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\Lambda_i} \eta_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \eta_k \right) - \frac{3\gamma_i \ddot{\gamma}_i \Lambda_i^3}{2\mu_{i0}^2} \eta_i, \quad (5.1)$$

$$\dot{\eta}_i = -f \sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{\Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i} \xi_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \xi_s \right) - f \sum_{k=i+1}^n m_k \left(\frac{\Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i} \xi_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \xi_k \right) + \frac{3\gamma_i \ddot{\gamma}_i \Lambda_i^3}{2\mu_{i0}^2} \xi_i \quad (5.2)$$

$$\dot{p}_i = -f \sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is} \left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_s}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \right) - f \sum_{k=i+1}^n m_k B_1^{ik} \left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_k}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \right) \quad (5.3)$$

$$\dot{q}_i = f \sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is} \left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_s}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \right) + f \sum_{k=i+1}^n m_k B_1^{ik} \left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_k}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \right) \quad (5.4)$$

5.2 Эволюциялық теңдеулерді өлшемсіз шамаға келтіру

Айнымалыларды өлшемсіз түрге келтіру үшін негізгі үш өлшем бірлікті өлшемсіз шамаға келтіру жеткілікті. Олар: аспан денелерінің массалары, олардың бір-бірінен арақашықтықтары және кеңістіктегі уақыт бірлігі.

Арақашықтықты өлшемсіз түрге келтіретін өлшем бірлік ретінде ең ішкі планетаның (бірінші планетаның) үлкен жарты өсі a_1 алынады. Демек, планета орбиталарының үлкен жарты өстерін a_i өлшемсіз шамаға келтіру үшін бірінші планетаның үлкен жарты өсіне a_1 бөлеміз: $a_i^* = \frac{a_i}{a_1}$.

Уақытты өлшемсіз түрге келтіретін өлшем бірлік ретінде P_1 периоды a_1 алынады. Есептің нәтижесі түсінікті болу үшін айнымалылардың уақыт бойынша эволюциясын көрсету кезінде өзімізге таныс жыл (жыл ұғымы тек Жер планетасына тән), тәулік немесе қандай да бір планетаның Күнді айналу периоды деген сияқты уақыт өлшем бірлігін қолданған ыңғайлы. Басқа аспан жүйелері үшін бұл өлшемдер құрылмаған. Өлшемсіз уақыт келесі өрнекпен анықталады

$\tau = -\frac{t}{T_1} = t \cdot \omega_1$. Бұл жердегі бастапқы уақыт моментіндегі P_1 планетаның жиілігі

$\omega_1 = \omega_1(t_0)$ келесідей анықталады:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{m_0(t_0)}}{a_1^{3/2}} = const . \quad (5.5)$$

P_1 планетасының периодын бастапқы уақыт моментінде сәйкесінше Жердің жыл өлшем бірлігімен жазамыз

$$T_1 = \frac{a_1^{3/2}}{m_0^{1/2}} = const . \quad (5.6)$$

Массаларды өлшемсіз түрге келтіру үшін аспан денелерінің массаларын Күн массасына $M_\odot$ бөлеміз. NASA базасында орталық жұлдыз массасы Күн массасымен, ал планеталардың массасы Жер не Юпитер массасымен берілгендіктен, жұлдыз массасынан тек $M_\odot$ өлшем бірлігі қысқарады, ал планета массаларын $M_\odot$ массасына келтіру қажеттігі туындайды.

Нәтижесінде есептеу жүргізу үшін келесі өлшемсіз шамаларды пайдаланамыз:

$$t^* = \tau = \omega_1 t , \quad a_i^* = \frac{a_i}{a_1} , \quad m_i^* = \frac{m_i}{M_\odot} , \quad (5.7)$$

мұндағы, t^* -өлшемсіз уақыт, a_i^* -өлшемсіз арақашықтық, m_i^* -өлшемсіз масса.

Орталық жұлдыз массасы $m_0 = m_0(t)$ Эдингтон-Джинс заңдылығымен өзгерсін:

$$m_0 = m_0(t) = (\varepsilon_0(1-n_0)(t-t_0) + m_{00}^{1-n_0})^{1/(1-n_0)} \quad (5.8)$$

Орталық жұлдыздың бастапқы уақыт кезіндегі массасы келесідей беріледі және тұрақты:

$$m_{00} = m_0(t_0) = \sigma_0 M_\odot = const . \quad (5.9)$$

мұндағы, $M_\odot$ - Күн массасы, σ_0 - NASA базасында орталық жұлдыз массасының сандық шамасы.

Және орталық жұлдыз массасының бастапқы кездегі уақыт бойынша өзгерісі тұрақты шама болсын:

$$\dot{m}_{00} = \left(\frac{dm_0}{dt} \right)_0 = k_0 \frac{M_\odot}{year} = const < 0 \quad (5.10)$$

мұндағы, k_0 – кез-келген сан. Орталық жұлдыздың массаларының өзгеру қарқындылығы да тұрақты шама болсын:

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\dot{m}_{00}}{m_{00}^{n_0}} \right) = const . \quad (5.11)$$

Ендігі кезекте массалар өзгеру заңдылығының өлшемсіз түрін алайық. Ол үшін (5.8) массаның өзгеру заңдылығын бастапқы уақыттағы жұлдыз массасына бөлеміз:

$$m_0^* = \frac{m_0(t)}{M_\odot} = \left(\varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0) + m_{00}^{1-n_0} \right)^{1/(1-n_0)} \cdot \frac{1}{M_\odot} \quad (5.12)$$

(5.9) өрнегін ескере отырып, (5.12) өрнегін келесідей жазамыз

$$\begin{aligned} m_0^* &= \left(\varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0) + \sigma_0^{1-n_0} M_\odot^{1-n_0} \right)^{1/(1-n_0)} \cdot \frac{1}{M_\odot} = \left(\frac{\varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0)}{M_\odot^{1-n_0}} + \frac{\sigma_0^{1-n_0} M_\odot^{1-n_0}}{M_\odot^{1-n_0}} \right)^{1/(1-n_0)} = \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0)}{M_\odot^{1-n_0}} + \sigma_0^{1-n_0} \right)^{1/(1-n_0)} = \left(\frac{\sigma_0^{1-n_0} \varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0)}{m_{00}^{1-n_0}} + \sigma_0^{1-n_0} \right)^{1/(1-n_0)} = \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0 (1 - n_0) (t - t_0)}{m_{00}^{1-n_0}} + 1 \right)^{1/(1-n_0)} \end{aligned}$$

(5.9) және (5.11) өрнегін ескеріп, соңғы өрнекті келесідей жазамыз:

$$\begin{aligned} m_0^* &= \sigma_0 \left(\frac{\dot{m}_{00}}{m_{00}^{n_0}} \frac{(1 - n_0) (t - t_0)}{m_{00}^{1-n_0}} + 1 \right)^{1/(1-n_0)} = \sigma_0 \left(\frac{\dot{m}_{00}}{m_{00}} (1 - n_0) (t - t_0) + 1 \right)^{1/(1-n_0)} = \sigma_0 \left(\frac{k_0 M_\odot}{m_{00}} (1 - n_0) \frac{(t - t_0)}{year} + 1 \right)^{1/(1-n_0)} = \\ &= \sigma_0 \left(\frac{k_0 M_\odot}{\sigma_0 M_\odot} (1 - n_0) \tau + 1 \right)^{1/(1-n_0)} = \sigma_0 \left(\frac{k_0}{\sigma_0} (1 - n_0) \tau + 1 \right)^{1/(1-n_0)} = \left(k_0 (1 - n_0) \tau + \sigma_0^{(1-n_0)} \right)^{1/(1-n_0)} \end{aligned}$$

Нәтижесінде орталық жұлдыздың массалар өзгеру заңдылығы өлшемсіз түрде жазылды:

$$m_0^* = \frac{m_0(t)}{M_\odot} = \left(k_0 (1 - n_0) \tau + \sigma_0^{(1-n_0)} \right)^{1/(1-n_0)} \quad (5.13)$$

Планеталардың массалары да $m_i = m_i(t)$ Эддингтон-Джинс заңы бойынша өзгерсін:

$$m_i = m_i(t) = \left(\varepsilon_i (1 - n_i) (t - t_0) + m_{i0}^{1-n_i} \right)^{1/(1-n_i)} \quad (5.14)$$

Планеталардың бастапқы уақыт кезіндегі массасы тұрақты:

$$m_{i0} = m_i(t_0) = \sigma_i M_\odot = const \quad (5.15)$$

Планеталардың да массаларының өзгеру қарқындылықтары және бастапқы уақыттағы массаларының уақыт бойынша өзгерісі тұрақты шама болсын:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{\dot{m}_{i0}}{m_{i0}^{n_i}} \right) = const, \quad \dot{m}_{i0} = \left(\frac{dm_i}{dt} \right)_0 = const, \quad (5.16)$$

мұндағы, планеталардың бастапқы уақыттағы массаларының уақыт бойынша өзгерісінің шамасы келесідей анықталады:

$$\dot{m}_{i0} = k_i \frac{M_{\odot}}{year} > 0 \quad (5.17)$$

мұндағы, k_i – кез-келген сан.

Ендігі кезекте планеталардың массалар өзгеру заңдылықтарының өлшемсіз түрін алайық. Ол үшін (5.14) өзгеру заңдылығын бастапқы уақыттағы жұлдыз массасына бөлеміз:

$$\begin{aligned} m_i^* &= \frac{m_i(t)}{M_{\odot}} = \left(\varepsilon_i (1-n_i)(t-t_0) + m_{i0}^{1-n_i} \right)^{1/(1-n_i)} \cdot \frac{1}{M_{\odot}} = \left(\frac{\varepsilon_i (1-n_i)(t-t_0)}{M_{\odot}^{1-n_i}} + \frac{\sigma_i^{1-n_i} M_{\odot}^{1-n_i}}{M_{\odot}^{1-n_i}} \right)^{1/(1-n_i)} = \\ &= \left(\frac{\varepsilon_i (1-n_i)(t-t_0)}{M_{\odot}^{1-n_i}} + \sigma_i^{1-n_i} \right)^{1/(1-n_i)} = \left(\frac{\sigma_i^{1-n_i} \varepsilon_i (1-n_i)(t-t_0)}{m_{i0}^{1-n_i}} + \sigma_i^{1-n_i} \right)^{1/(1-n_i)} = \sigma_i \left(\frac{\varepsilon_i (1-n_i)(t-t_0)}{m_{i0}^{1-n_i}} + 1 \right)^{1/(1-n_i)} = \\ &= \sigma_i \left(\frac{\dot{m}_{i0} (1-n_i)(t-t_0)}{m_{i0}^{1-n_i}} + 1 \right)^{1/(1-n_i)} = \sigma_i \left(\frac{\dot{m}_{i0}}{m_{i0}} (1-n_i)(t-t_0) + 1 \right)^{1/(1-n_i)} = \sigma_i \left(k_i \frac{M_{\odot}}{year} \frac{1}{m_{i0}} (1-n_i)(t-t_0) + 1 \right)^{1/(1-n_i)} = \\ &= \sigma_i \left(k_i \frac{M_{\odot}}{\sigma_i M_{\odot}} (1-n_i) \tau + 1 \right)^{1/(1-n_i)} = \left(k_i (1-n_i) \tau + \sigma_i^{(1-n_i)} \right)^{1/(1-n_i)} \end{aligned}$$

Нәтижесінде орталық жұлдыздың массалар өзгеру заңдылығы өлшемсіз түрде жазылды:

$$m_i^* = \frac{m_i(t)}{M_{\odot}} = \left(k_i (1-n_i) \tau + \sigma_i^{(1-n_i)} \right)^{1/(1-n_i)} \quad (5.18)$$

Ендігі кезекте $\gamma_i = \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)} = \gamma_i(t) \Rightarrow \gamma_i(\tau)$, шамасының өлшемсіз түрі қажет болады. Ол үшін осы өрнектегі массаларды өлшемсіз шамаға келтіру қажет. Ол үшін келесі математикалық операцияларды орындаймыз:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{m_0(t_0) + m_i(t_0)}{m_0(t) + m_i(t)} = \frac{m_{00} + m_{i0}}{m_0(t) + m_i(t)} = \gamma_i(t) \Rightarrow \gamma_i(\tau) = \frac{\left(\frac{m_{00}}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{m_{i0}}{M_{\odot}} \right)}{\left(\frac{m_0(t)}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{m_i(t)}{M_{\odot}} \right)} \quad (5.19) \\ \gamma_i(\tau) &= \frac{\left(\frac{m_{00}}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{m_{i0}}{M_{\odot}} \right)}{\left(\frac{m_0(t)}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{m_i(t)}{M_{\odot}} \right)} = \frac{\left(\frac{\sigma_0 M_{\odot}}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{\sigma_i M_{\odot}}{M_{\odot}} \right)}{\left(\frac{\sigma_0 M_{\odot}}{M_{\odot}} \right) + \left(\frac{\sigma_i M_{\odot}}{M_{\odot}} \right)} = \frac{\left(\sigma_0 M_{\odot} / M_{\odot} \right) + \left(\sigma_i M_{\odot} / M_{\odot} \right)}{\left(k_0 (1-n_0) \tau + \sigma_0^{(1-n_0)} \right)^{1/(1-n_0)} + \left(k_i (1-n_i) \tau + \sigma_i^{(1-n_i)} \right)^{1/(1-n_i)}} \end{aligned}$$

Нәтижесінде γ_i үшін келесі өлшемсіз өрнекті аламыз:

$$\gamma_i(\tau) = \frac{\sigma_0 + \sigma_i}{\left(k_0(1-n_0)\tau + \sigma_0^{(1-n_0)}\right)^{1/(1-n_0)} + \left(k_i(1-n_i)\tau + \sigma_i^{(1-n_i)}\right)^{1/(1-n_i)}} \quad (5.20)$$

Демек, (5.20) өлшемсіз өрнегінің арқасында планеталардың өзара қиылыспаушылық шарттары да өлшемсіз түрге енеді.

$$\alpha_{ik} = \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_k a_k} = \alpha_{ik}(t) < 1, \quad \alpha_{is} = \frac{\gamma_s a_s}{\gamma_i a_i} = \alpha_{is}(t) < 1, \quad (5.21)$$

Орталық жұлдыз массасы және планеталардың массасы үшін келесі өлшемсіз белгілеу енгізілген:

$$\mu_{i0}^* = 1 + \frac{m_{i0}}{m_{00}} = 1 + \frac{\sigma_i}{\sigma_0} = \text{const} \quad (5.22)$$

Өлшемсіз шамалар енгізіліп болды. Ендігі кезекте есептеу жүргізу үшін келесі бастапқы шарттарды пайдаланамыз:

$$M_\odot = M_\odot(t_0) = \text{const} \quad a_1 = a_1(t_0) = \text{const} \quad \frac{d}{d\tau} = ()' \quad (5.23)$$

Сол кезде (5.7) өрнегінен бастапқы физикалық шамалар келесідей анықталады:

$$a_i = a_1 a_i^* \quad m_i = M_\odot m_i^* \quad (5.24)$$

Сонда, өлшемді және өлшемсіз эволюциялық теңдеулер арасында келесідей қатынас орнайды:

$$\Lambda_i = \sqrt{fM_\odot} \sqrt{a_1} \Lambda_i^* \quad \Lambda_i^* = \sqrt{\mu_{i0}^*} \sqrt{a_i^*} \quad (5.25)$$

$$\xi_i = \xi_i^* (fM_\odot a_1)^{1/4}, \quad \eta_i = \eta_i^* (fM_\odot a_1)^{1/4}, \quad p_i = p_i^* (fM_\odot a_1)^{1/4}, \quad q_i = q_i^* (fM_\odot a_1)^{1/4} \quad (5.26)$$

$$\frac{3\ddot{\gamma}_i \Lambda_i^3}{2\gamma_i \mu_{i0}^2} = \omega_1 \frac{3\gamma_i'' \Lambda_i^{*3}}{2\gamma_i \mu_{i0}^{*2}} \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = ()'' \quad (5.27)$$

мұндағы

$$a_i, \quad e_i, \quad i_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad \phi_i(\tau_i) \quad (5.28)$$

квазиконустық қима бойынша апериодты қозғалыстың оскуляция элементтерінің аналогтары.

Нәтижесінде өлшемсіз эволюциялық теңдеулер келесідей түрге ие болады:

$$\xi_i^* = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}^*}\sqrt{a_i^*}(1-\sqrt{1-e_i^2})}\cos\pi_i, \quad \eta_i^* = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}^*}\sqrt{a_i^*}(1-\sqrt{1-e_i^2})}\sin\pi_i, \quad (5.29)$$

$$p_i^* = \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}^*}\sqrt{a_i^*}\sqrt{1-e_i^2}(1-\cos i_i)}\cos\Omega_i, \quad q_i^* = -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}^*}\sqrt{a_i^*}\sqrt{1-e_i^2}(1-\cos i_i)}\sin\Omega_i, \quad (5.30)$$

(5.1)-(5.4) теңдеулерінде теңдеудің оң жағын да, сол жағын да ортақ көпмүшелікке $\omega_1(fM_\odot a_1)^{1/4} = \text{const}$ қысқарту арқылы эволюциялық теңдеулерді өлшемсіз шамаларда аламыз.

Жазуға ыңғайлы болу үшін (*) жұлдызша белгісін ескермей, (5.1)-(5.4) теңдеулерін өлшемсіз шамалармен қайтадан жазамыз

$$\begin{aligned} \xi_i' &= \sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{\Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i} \eta_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \eta_s \right) + \sum_{k=i+1}^n m_k \left(\frac{\Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i} \eta_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \eta_k \right) - \frac{3}{2} \frac{\gamma_i \gamma_i'' \Lambda_i^3}{\mu_{i0}^2} \eta_i, \\ \eta_i' &= -\sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{\Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i} \xi_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \xi_s \right) - \sum_{k=i+1}^n m_k \left(\frac{\Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i} \xi_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \xi_k \right) - \frac{3}{2} \frac{\gamma_i \gamma_i'' \Lambda_i^3}{\mu_{i0}^2} \xi_i, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} p_i' &= -\sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is} \left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_s}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \right) - \sum_{k=i+1}^n m_k B_1^{ik} \left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_k}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \right), \\ q_i' &= \sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is} \left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_s}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_s}} \right) + \sum_{k=i+1}^n m_k B_1^{ik} \left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_k}{4\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}} \right). \end{aligned}$$

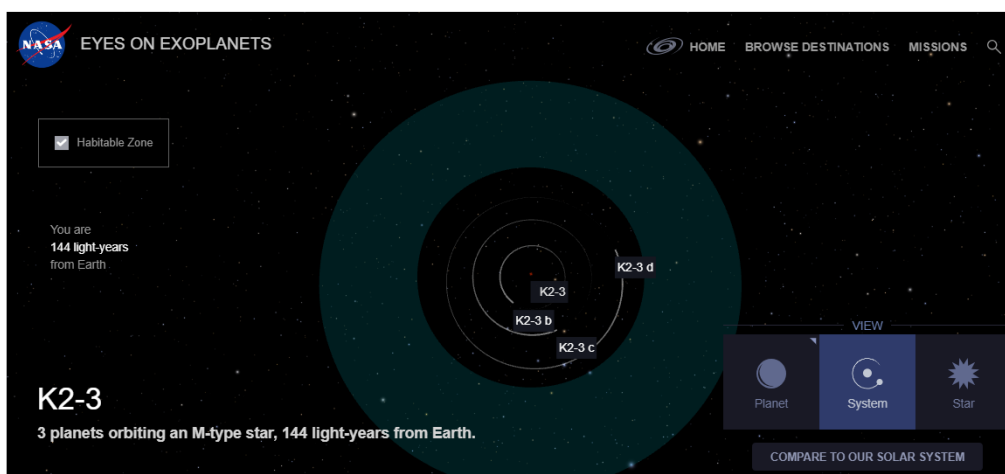
Осы алынған өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесі автономды емес сызықты $4N$ теңдеулерден тұрады. (5.31) теңдеудегі Π_{ii}^{is} , Π_{is}^{is} , Π_{kk}^{ik} , Π_{ik}^{ik} өрнектер және Лаплас коэффициенттері өзінің бастапқы түрін сақтайды. Олар о бастан өлшемсіз шама болып табылған.

6 ЭКЗОПЛАНЕТА ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ЭВОЛЮЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ

6.1 K2-3 экзопланета жүйесі

M ергежейлінің төңірегінде айналатын көп планеталы жүйе - планеталардың құрылу теориясы мен кіші планеталардың эволюциясын тексеруге құнды объект болып табылады. K2-3 біздің Күн жүйемізге жақын орналасқан (45 пк) спектральді типі *M0* болып табылатын жарық ергежейлі жұлдыз. Бұл жүйенің балама есімі EPIC 201367065. Осы жүйенің үш планетасының температурасы төмен және олар көлемі бойынша кіші планеталар қатарына жатады. Бұл жүйенің архитектурасын зерттеу, массасын және радиустарын өлшеу, сонымен қатар атмосферасын бақылау үшін планеталардың эволюциясын зерттеу маңызды орынға ие.

2015 жылы [116] жұмысында K2-3 жарық ергежейлінің төңірегінде үш кіші планетаның табылғандығы жарияланды (12-сурет). Жұлдыздық спектроскопия және фотометриясы жүйеде радиустары $1,5\text{--}2,1 R_{\oplus}$ -ға тең үш транзитті планетаға ұқсас объект бар екендігін көрсетеді. Бұл планеталар таулы-қыраттан әлде-қайда өзгермелі құрам арасындағы өтпелі аймақта орналасқан. Айналу периодтары 10-45 күнді құрайды және оларға Жерге түсетін ағыннан 1,5-1, есе көп жұлдыз ағыны әсер етеді. Бұл оларды орталық жұлдызға жақын орбитада орналасқан ерекше кіші планеталар моделі ретінде қарастырып, зерттеуге мүмкіндік береді. K2-3 *d* планетасы осы жүйенің өмір сүру аймағының ішкі шеңберіне жақын орналасқан.



12 сурет – K2-3 экзопланета жүйесі

Планеталардың радиусы кіші болса да, 2013 жылы [117] мақаласында авторлар жүйенің архитектурасын фотобулану немесе ядро энергиясының есебінен массаның азаю процесі арқылы оңай түсіндіру мүмкін емес екендігін

айтты. Бұл жұмыста *K2-3* жүйесінің архитектурасы барлық планеталарының жеңіл ұшатын заттарға бай екендігімен және тығыздығы қарапайым СуперЖер планеталарынан әлде-қайда аз екендігімен және / немесе планеталардың құрылуы, миграция жасауы нәтижесінде пайда болған кездейсоқ процесстердің нәтижесі деп болжам жасалған. 2015 жылы [118] жұмысында *K2-3 b* планетасының массасы $8,4 \pm 2,1 M_{\oplus}$ тең екендігі анықталды, сонымен қатар *c* және *d* планеталарына жұлдыздың белсенділігі әсер ететіндігі байқалды. 2016 жылы [119] жұмысында авторлар планеталардың массасын өлшеу үшін транзитті планеталары бар 5 орталық жұлдызды доплерлік түрде бақылаған, соның ішінде *K2-3* жүйесі планеталарының радиустары шамамен берілген. Аталған жылы [119] жұмысында 197 планетаға үміткер аспан денесі туралы мағлұматтар келтірілді, және кіші *K2* планеталары 30%-ке артқандығы айтылды (3-кесте).

3 кесте – 2016 жылы белгілі болған *K2* планета болуға үміткер аспан денелерінің параметрлері

Other Name	EPIC	<i>P</i> (d)	<i>T</i> ₀ (BJD _{TDB} –2454833)	<i>T</i> ₁₄ (hr)	<i>R</i> _p / <i>R</i> _* (%)	<i>a</i> (au)	<i>R</i> _p (<i>R</i> _⊕)	<i>S</i> _{inc} (<i>S</i> _⊕)	FPP	Disposition
K2-42b	201155177.01	6.68796(93)	1981.6763(52)	3.04(20)	3.04(28)	0.0617(13)	2.15(24)	44.1(6.3)	5.2e–07	Planet
	201176672.01	79.9999(98)	2044.8046(15)	11.75(17)	18.0(1.1)	0.299(16)	10.2(2.1)	1.10(46)	0.094	Candidate (see Tables 6 and 1)
K2-43b	201205469.01	3.47114(21)	1976.8845(33)	1.97(11)	6.60(36)	0.03784(63)	4.13(31)	49.0(6.9)	9.7e–10	Planet
K2-4b	201208431.01	10.0044(11)	1982.5170(45)	2.87(17)	3.49(41)	0.0715(35)	1.69(30)	8.9(2.7)	0.00028	Planet
	201247497.01	2.75391(15)	1977.9031(23)	1.03(14)	7.9(1.3)	0.03035(59)	3.78(68)	43.7(6.1)	0.41	Candidate
K2-44b	201295312.01	5.65688(59)	1978.7176(44)	4.36(13)	1.56(12)	0.0651(11)	2.72(32)	646(126)	6.7e–07	Planet
	201324549.01	2.519334(35)	1976.99353(69)	1.545(15)	2.41(30)	0.0383(13)	3.91(85)	2002(727)	1	False Positive (see Tables 6 and 3)
K2-5c	201338508.01	10.9324(14)	1981.6012(55)	2.84(23)	3.24(29)	0.0775(22)	1.64(20)	8.3(1.6)	2.8e–05	Planet
K2-5b	201338508.02	5.73597(68)	1975.8602(53)	2.35(18)	2.97(22)	0.0504(14)	1.50(17)	19.7(3.7)	5.4e–06	Planet
K2-45b	201345483.01	1.7292684(69)	1976.52604(18)	1.689(14)	13.76(19)	0.0224(12)	6.71(00)	100(32)	6.8e–06	Planet
K2-3b	201367065.01	10.05443(26)	1980.4178(12)	2.520(59)	3.51(15)	0.0679(32)	1.44(20)	5.8(1.7)	1.9e–08	Planet
K2-3c	201367065.02	24.6435(12)	1979.2811(24)	3.38(12)	2.88(16)	0.1235(58)	1.18(17)	1.77(53)	2.1e–08	Planet
K2-3d	201367065.03	44.5609(52)	1993.2285(34)	4.04(19)	2.35(15)	0.1833(86)	0.96(14)	0.80(24)	1.2e–07	Planet

2018 жылы [118] жұмысында *K2-3* планеталарының массасы мен тығыздықтарын өлшеуді жақсарту қарастырылған. 2019 жылы [120] жұмысында сәулелік жылдамдық және транзит бақылаулары нәтижесінде *K2-3* жүйесінің массасы, радиусы және тығыздығы бойынша жаңа мағлұматтар алынды. 2023 жылы [121] жұмысында сәулелік жылдамдық әдісімен *Kepler* және *K2* кіші планеталарының (64 планетаның) массасы анықталған. Осы жұмыстан алынған келесі кесте үзіндісінде *K2-3* жұлдызының басқа да параметрлері көрсетілген (4-кесте).

4 кесте – *K2* жүйесінің параметрлері

System	Multiple/single transiting system	<i>M</i> _* [<i>M</i> _⊙]	<i>R</i> _* [<i>R</i> _⊙]	<i>T</i> _{eff} [K]	[Fe/H] [dex]	Age [Gyr]	<i>N</i> _{KV} tot	<i>N</i> _{KV} HN	<i>N</i> _{DM}	Duration [day]	System and/or literature data reference
K2-3	m	0.62 ± 0.06	0.60 ± 0.06	3835 ± 70	–0.01 ± 0.09	> 1	327	195	3	898	23

NASA базасында [13] *K2-3* жүйенің параметрлері толық келтірілген (5-кесте).

5 кесте – $K2-3$ жүйесінің $NASA$ базасынан алынған параметрлері

Planet Name	Host Name	Planetary Parameter Reference	Orbital Period [days]	Semi-Major Axis [au]	Planet Radius [Earth Radius]	Planet Mass [Earth Mass]	Eccentricity	Inclination [deg]	Argument of Periastron [deg]	Spectral Type	Stellar Radius [Solar Radius]	Stellar Mass [Solar Mass]	Distance [pc]
K2-3	K2-3	Kossarek et al. 2019	10.054620 $^{+0.00010}_{-0.00011}$		6.49 $^{+0.08}_{-0.02}$	0	89.588 $^{+0.108}_{-0.102}$	0		M0.0±0.5 V	0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Ernst et al. 2019	10.0546436720782±0.0016		2.298±0.044						0.560±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Beichman et al. 2016	10.054544±0.00029		2.08±0.25						0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Barnes et al. 2016	10.05176778								0.560±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Damasso et al. 2018	10.05454±0.00003	0.0777 $^{+0.0024}_{-0.0028}$	2.29±0.23	6.6±1.1					0.60±0.06	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Montet et al. 2015	10.05448±0.00033	0.0740±0.0009	1.86±0.10						0.52±0.02	0.53±0.02	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Diamond-Lovae et al. 2022	10.054653± $^{+0.000008}_{-0.000011}$	0.0747 $^{+0.0013}_{-0.0012}$	2.078 $^{+0.087}_{-0.087}$	5.1 $^{+0.66}_{-0.64}$	0.107 $^{+0.037}_{-0.036}$	89.40 $^{+0.24}_{-0.24}$	188 $^{+102}_{-14}$		0.540 $^{+0.018}_{-0.018}$	0.540 $^{+0.022}_{-0.022}$	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Dai et al. 2016	10.054003 $^{+0.00008}_{-0.00009}$	0.0769 $^{+0.0028}_{-0.0040}$	2.14 $^{+0.21}_{-0.25}$	8.19 $^{+0.08}_{-0.09}$	0				0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Crossfield et al. 2015	10.05403 $^{+0.00008}_{-0.00008}$	0.0769 $^{+0.0028}_{-0.0040}$	2.14 $^{+0.21}_{-0.25}$			89.28 $^{+0.41}_{-0.41}$			0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Bonomo et al. 2023	10.0546209±0.0000000	0.0778±0.0026	2.25±0.23	6.4 $^{+0.05}_{-0.04}$	-0.094	89.588 $^{+0.108}_{-0.102}$			0.60±0.06	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Kossarek et al. 2019	10.06407±0.00011	1.46 $^{+0.21}_{-0.21}$							0.371 $^{+0.037}_{-0.041}$	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Almanara et al. 2015	10.05429±0.00022	0.0775±0.0038	2.078 $^{+0.087}_{-0.087}$	8.40±2.10	0.060±0.060	89.59 $^{+0.24}_{-0.24}$	180±70		0.553±0.041	0.612±0.088	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Simuff et al. 2016	10.05448±0.00026	0.0769±0.0039	2.18±0.30			88.89 $^{+0.12}_{-0.12}$			0.56±0.07	0.60±0.09	44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Vanderburg et al. 2016	10.054374		2.4						0.58		44.07270±0.1081
K2-3 b	K2-3	Crossfield et al. 2016	10.05443±0.00026	0.0679±0.0032	1.44±0.20						0.371±0.050	0.414±0.058	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Crossfield et al. 2016	24.6435±0.0012	0.1235±0.0058	1.18±0.17						0.371±0.050	0.414±0.058	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Montet et al. 2015	24.64745±0.00152	0.1345±0.0016	1.56±0.10						0.52±0.02	0.53±0.02	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Bonomo et al. 2023	24.648582±0.000039	0.1414±0.0047	1.69±0.17	3.3±1.2	-0.095	89.505 $^{+0.088}_{-0.088}$			0.60±0.06	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Kossarek et al. 2019	24.64871 $^{+0.00004}_{-0.00005}$		1.18 $^{+0.21}_{-0.18}$	2.14 $^{+0.08}_{-0.14}$	0	89.505 $^{+0.088}_{-0.088}$			0.371 $^{+0.037}_{-0.041}$		44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Damasso et al. 2018	24.64562 $^{+0.00004}_{-0.00004}$	0.1413 $^{+0.0044}_{-0.0047}$	1.77±0.18	3.1 $^{+1.1}_{-1.2}$	0	89.505 $^{+0.088}_{-0.088}$			0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Diamond-Lovae et al. 2022	24.648729 $^{+0.00004}_{-0.00002}$	0.1367 $^{+0.0023}_{-0.0023}$	1.562 $^{+0.087}_{-0.087}$	2.68±0.85	0.0489 $^{+0.0702}_{-0.0702}$	89.84 $^{+0.11}_{-0.14}$	-180 $^{+100}_{-100}$		0.546 $^{+0.018}_{-0.018}$	0.540 $^{+0.022}_{-0.022}$	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Almanara et al. 2015	24.6491±0.0033	0.1405±0.0067	1.644 $^{+0.180}_{-0.180}$	2.1 $^{+0.1}_{-0.1}$	0.04±0.04	89.70±0.20	89.0±110.0		0.553±0.041	0.612±0.088	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Crossfield et al. 2015	24.64540±0.0013	0.1399 $^{+0.0088}_{-0.0073}$	1.72 $^{+0.22}_{-0.22}$			89.55 $^{+0.28}_{-0.34}$			0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Beichman et al. 2016	24.64638±0.00018	1.69±0.21							0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Vanderburg et al. 2016	24.645013		1.9						0.58		44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Dai et al. 2016	24.64540±0.0013	1.72 $^{+0.22}_{-0.22}$	-4.2	0					0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Simuff et al. 2016	24.64564±0.00117	0.1399±0.0070	1.85±0.27			89.13 $^{+0.02}_{-0.02}$			0.56±0.07	0.60±0.09	44.07270±0.1081
K2-3 c	K2-3	Simuff et al. 2016	44.55982±0.00090	0.2076±0.0104	1.51±0.23			89.30 $^{+0.02}_{-0.04}$			0.56±0.07	0.60±0.09	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Dai et al. 2016	44.5631 $^{+0.0001}_{-0.0001}$		1.52 $^{+0.21}_{-0.21}$	7.50±3.09	0				0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Vanderburg et al. 2016	44.561150		1.7						0.58		44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Almanara et al. 2015	44.5705±0.0059	0.2086±0.0100	1.53±0.11	11.1±3.5	0.045±0.045	89.79±0.15	351±88		0.553±0.041	0.612±0.088	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Diamond-Lovae et al. 2022	44.55603 $^{+0.00012}_{-0.00012}$	0.2014 $^{+0.0024}_{-0.0024}$	1.458 $^{+0.088}_{-0.088}$	-2.2	0.0919 $^{+0.1202}_{-0.1202}$	89.82 $^{+0.12}_{-0.12}$	0 $^{+0.0}_{-0.0}$		0.540 $^{+0.018}_{-0.018}$	0.540 $^{+0.022}_{-0.022}$	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Fukui et al. 2016	44.55612±0.00021								0.550±0.060	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Crossfield et al. 2015	44.5631 $^{+0.0001}_{-0.0001}$	0.2076 $^{+0.0088}_{-0.0103}$	1.52 $^{+0.21}_{-0.21}$			89.68 $^{+0.21}_{-0.21}$			0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Crossfield et al. 2016	44.56095±0.00052	0.1833±0.0088	0.96±0.14			371±0.050			0.414±0.058		44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Kossarek et al. 2019	44.5574±0.0023		1.11 $^{+0.21}_{-0.21}$			0.371 $^{+0.037}_{-0.041}$					44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Almanara et al. 2015	44.55646 $^{+0.00011}_{-0.00011}$			-2.80	0	89.788 $^{+0.033}_{-0.033}$	0		0.561±0.068	0.601±0.089	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Damasso et al. 2018	44.55784±0.00042	0.2087 $^{+0.0088}_{-0.0079}$	1.65±0.17	+1.8					0.60±0.06	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Bonomo et al. 2023	44.556456±0.000097	0.2097±0.0070	1.62±0.18	+1.6	-0.097	89.788 $^{+0.033}_{-0.033}$			0.60±0.06	0.62±0.06	44.07270±0.1081
K2-3 d	K2-3	Beichman et al. 2016	44.55765±0.00043		1.61±0.20						0.561±0.068		44.07270±0.1081

5-кестеден көріп отырғанымыздай [122] жұмысында бізге қажетті параметрлер толық, сол себепті осы жұмыстағы мағлұматтар бастапқы шарт ретінде пайдаланылды (6-кесте).

6 кесте – $K2-3$ жүйесінің орбита параметрлері және массалары

	a (астр.бірлік)	e	i (градус)	ω (градус)	M
K2-3					$0,612 M_{\odot}$
K2-3 b	0.0775	0.060	89.59	180	$8,40 M_{\oplus}$
K2-3 c	0.1405	0.04	89.70	89.0	$2,1 M_{\oplus}$
K2-3 d	0.2086	0.045	89.79	351	$11,1 M_{\oplus}$

Сонымен қатар, тірек жазықтығын 90^0 деп қабылдап, орбита жазықтығының көлбеулігі үшін 6-кестедегі мәндер пайдаланылды: $K2-3 b$ үшін $i_1 = 90 - 89.59 = 0.41$, $K2-3 c$ үшін $i_2 = 90 - 89.70 = 0.3$, және $K2-3 d$ үшін $i_3 = 90 - 89.79 = 0.21$. Есеп кезінде бұрыштардың өлшем бірлігі ретінде радиан алынды. Орталық жұлдыздың массасы $M_{\odot}$ -сымен алынды, және планеталардың массалары да $M_{\oplus}$ -на келтірілді. Сонымен қатар есепті шешу үшін түйіндер сызығы бойлығының бастапқы мәні керек. Алайда осы бойлық туралы ақпарат табылмады. Сол себепті де түйіндер сызығының бойлығы 45^0 -не тең жағдайын қарастырдық. Перицентр бойлығы келесідей есептеледі: $\pi_{i0} = \pi_i(t_0) = \Omega_i + \omega_i$

7 кесте – K2-3 жүйесінің өлшемсіз бастапқы шарттары

	a	e	i (рад.)	ω (рад.)	$M(M_{\odot})$	Ω (рад.)	k
K2-3					0,612		-10^{-6}
K2-3 b	1	0,060	$0.41\pi / 180$	π	$2523 \cdot 10^{-8}$	$\pi / 4$	$2,5 \cdot 10^{-5}$
K2-3 c	1.8129	0,04	$0.3\pi / 180$	$89 \pi / 180$	$630.759 \cdot 10^{-8}$	$\pi / 4$	$1,43 \cdot 10^{-5}$
K2-3 d	2.691617	0,045	$0.21\pi / 180$	$351 \pi / 180$	$3334 \cdot 10^{-8}$	$\pi / 4$	$1,25 \cdot 10^{-5}$

6.2 Үш планеталы төрт дене мәселесі үшін өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесі

Өлшемсіз эволюциялық теңдеулерді $N=3$ дербес жағдайы үшін анық түрде жазылды. P_1 планетасы үшін тек сыртқы планеталардың әсері бар ($s=0, k=2,3$), ал P_2 планетасы үшін бір ішкі планетаның ұйытқуын ($s=1$) және бір сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1$) ескереміз. Сыртқы P_3 планетасы үшін тек ішкі планеталардың ($s=1,2, k=0$) әсері бар.

Орбита пішінін сипаттайтын өлшемсіз теңдеулер жүйесі алты теңдеуден тұрады

$$\begin{aligned}
 \xi'_1 &= (b_2^{1,2} + b_2^{1,3} + b_3^1) \cdot \eta_1 + b_1^{1,2} \cdot \eta_2 + b_1^{1,3} \cdot \eta_3, & \eta'_1 &= -(b_2^{1,2} + b_2^{1,3} + b_3^1) \cdot \xi_1 - b_1^{1,2} \cdot \xi_2 - b_1^{1,3} \cdot \xi_3, \\
 \xi'_2 &= b_1^{2,1} \cdot \eta_1 + (b_2^{2,1} + b_2^{2,3} + b_3^2) \cdot \eta_2 + b_1^{2,3} \cdot \eta_3, & \eta'_2 &= -b_1^{2,1} \cdot \xi_1 - (b_2^{2,1} + b_2^{2,3} + b_3^2) \cdot \xi_2 - b_1^{2,3} \cdot \xi_3, \\
 \xi'_3 &= b_1^{3,1} \cdot \eta_1 + b_1^{3,2} \cdot \eta_2 + (b_2^{3,1} + b_2^{3,2} + b_3^3) \cdot \eta_3, & \eta'_3 &= -b_1^{3,1} \cdot \xi_1 - b_1^{3,2} \cdot \xi_2 - (b_2^{3,1} + b_2^{3,2} + b_3^3) \cdot \xi_3,
 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Орбита жазықтығының кеңістікте орналасуын сипаттайтын өлшемсіз теңдеулер жүйесі де алты теңдеуден тұрады

$$\begin{aligned}
 p'_1 &= -(\beta_2^{1,2} + \beta_2^{1,3}) \cdot q_1 + \beta_1^{1,2} \cdot q_2 + \beta_1^{1,3} \cdot q_3, & q'_1 &= (\beta_2^{1,2} + \beta_2^{1,3}) \cdot p_1 - \beta_1^{1,2} \cdot p_2 - \beta_1^{1,3} \cdot p_3, \\
 p'_2 &= \beta_1^{2,1} \cdot q_1 - (\beta_2^{2,1} + \beta_2^{2,3}) \cdot q_2 + \beta_1^{2,3} \cdot q_3, & q'_2 &= -\beta_1^{2,1} \cdot p_1 + (\beta_2^{2,1} + \beta_2^{2,3}) \cdot p_2 - \beta_1^{2,3} \cdot p_3, \\
 p'_3 &= \beta_1^{3,1} \cdot q_1 + \beta_1^{3,2} \cdot q_2 - (\beta_2^{3,1} + \beta_2^{3,2}) \cdot q_3, & q'_3 &= -\beta_1^{3,1} \cdot p_1 - \beta_1^{3,2} \cdot p_2 + (\beta_2^{3,1} + \beta_2^{3,2}) \cdot p_3,
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

(6.17)-(6.18) теңдеулер жүйесінде сыртқы планеталардың әсерін ескеретін келесі белгілеулер енгізілген:

$$b_1^{ik} = \frac{m_k \Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}}, \quad b_2^{ik} = \frac{m_k \Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i}, \quad b_3^i = -\frac{3}{2} \frac{\gamma_i \gamma_i'' \Lambda_i^3}{\mu_{i0}^2}, \quad (6.5)$$

$$\beta_1^{i,k} = \frac{1}{4} \frac{m_k B_1^{i,k}}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_k}}, \quad \beta_2^{i,k} = \frac{1}{4} \frac{m_k B_1^{i,k}}{\Lambda_i}, \quad (6.6)$$

(6.17)-(6.18) теңдеулер жүйесінде ішкі планеталардың әсерін ескеретін келесі белгілеулер енгізілген:

$$b_1^{is} = \frac{m_s \Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_s \Lambda_i}}, \quad b_2^{is} = \frac{m_s \Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i}, \quad b_3^i = -\frac{3}{2} \frac{\gamma_i \gamma_i'' \Lambda_i^3}{\mu_{i0}^2}, \quad (6.7)$$

$$\beta_1^{i,s} = \frac{1}{4} \frac{m_s B_1^{i,s}}{\sqrt{\Lambda_s \Lambda_i}}, \quad \beta_2^{i,s} = \frac{1}{4} \frac{m_s B_1^{i,s}}{\Lambda_i}, \quad (6.8)$$

7-кестедегі бастапқы шарттарды пайдалану арқылы бастапқы уақыт моментіндегі өлшемсіз эволюциялық айнымалылардың сан мәндерін (5.29)-(5.30) өрнектер көмегімен аламыз және сан мәндері 8-кестеде келтірілген:

8 кесте – Эволюциялық айнымалылардың сан мәндері

ξ_1^*	-0.0424458	η_1^*	0.0424458	p_1^*	0.00508007	q_1^*	-0.00508007
ξ_2^*	-0.0322487	η_2^*	-0.0333945	p_2^*	0.00429441	q_2^*	-0.00429441
ξ_3^*	0.0466431	η_3^*	-0.0338882	p_3^*	0.00331794	q_3^*	-0.00331794

Орталық жұлдыз массасы $m_0 = m_0(t)$ Эдингтон-Джинс заңдылығымен Мещерскийдің II заңы бойынша $n_0 = 3$ өзгерсін.

$$m_0^* = \frac{1}{(\sigma_0^{-2} - 2k_0 \tau)^{1/2}} \quad (6.9)$$

Планеталардың массалары да $m_i = m_i(t)$ Эддингтон-Джинс заңы бойынша, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ Мещерскийдің I заңы бойынша өзгерсін.

$$m_i^* = \frac{1}{\sigma_i^{-1} - k_i \tau} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

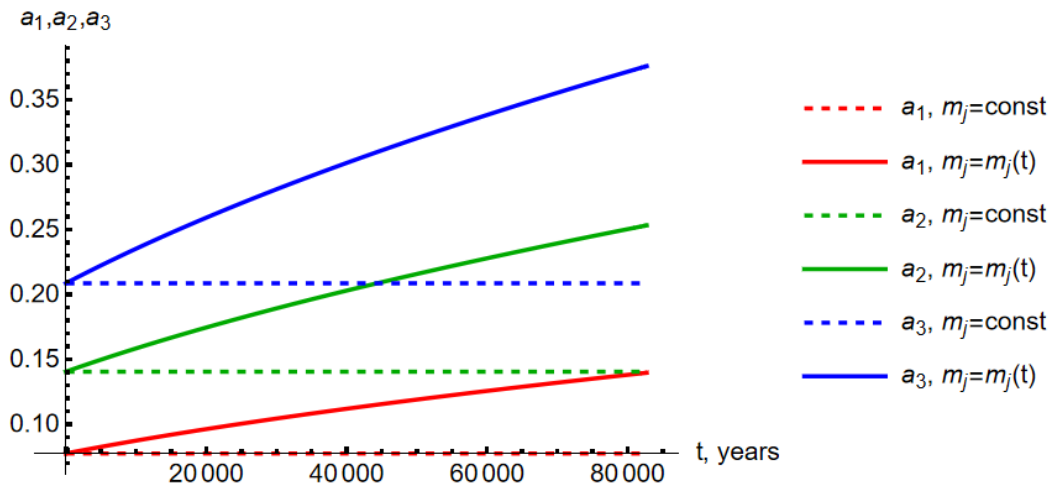
6.3 Үш планета жағдайында орбитальді элементтер аналогтарын талдау

K2-3 b ішкі планетаның орбиталды периоды $T_1 = 10.55$ тәулікке, демек шамамен 0,0276 жылға тең. Бұл планета 1 жылда 36.26 айналым жасайды. Төменде алынған графиктерде K2-3 b планетасының 3 млн айналым (82736.68 жыл) уақытындағы орбита элементтерінің эволюциясы алынған және осы элементтердің эволюциясы тұрақты масса жағдайымен салыстырылған (13-18 суреттер).

Орбита пішінін анықтауға мүмкіндік беретін элементтердің графигі келесі теңдеулер көмегімен алынды:

$$a_i = \gamma_i a_i(t_0), \quad e_i^2 = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{A_i} \quad (6.11)$$

Тұрақты масса кезінде үлкен жарты өстер тұрақты. Ал айнымалы масса кезінде аталған орбита элементі өседі (13-сурет). Ең ішкі планетаның үлкен жарты өсі 3 млн айналым кезінде 0.0621517 а.е.-ге өсті. Ортаңғы планетаның үлкен жарты өсі 0.112681 а.е.-ге өсті. Ал сыртқы планетаның үлкен жарты өсі 0.167284 а.е.-ге өсті. Демек, үлкен жарты өс екі есе өсіп кету шекарасына жеткен жоқ.



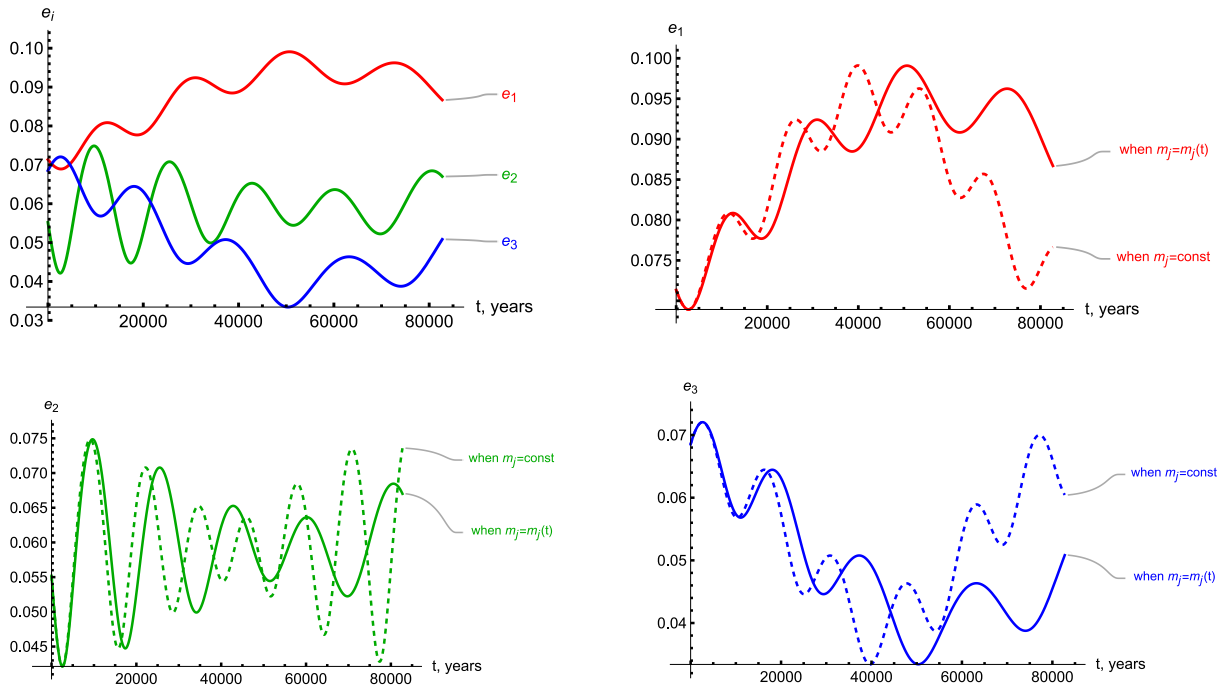
13 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналымындағы масса жағдайында үлкен жарты өстерінің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру

Қарастырылған уақыт интервалында ішкі планетаның эксцентриситеті аperiодты түрде өсетіні, ал ең сыртқы планетаның эксцентриситеті аperiодты түрде кемитіндігі көрініп тұр, ал ортаңғы планетаның эксцентриситет амплитудасы шамамен 50 000-65 000 жыл аралығында максималды түрде азаятындығын байқауға болады (14-сурет). Енді осы планеталардың эксцентриситеттерін тұрақты масса жағдайымен салыстырайық.

Тұрақты масса кезінде ішкі планетаның эксцентриситеті 40 000 жылда максимум болса, айнымалы масса кезінде бұл көрсеткіш 50 000 жылға тән екендігі көрініп тұр. Шамамен 10 000 жылға дейін екі жағдай үшін де эксцентриситет мәні шамалас, 15 000 жылдан бастап айырмашылық байқалады, ең үлкен айырмашылық 75 000 жылдар шамасында, яғни планета 2 млн 750 мың айналым жасаған кезде болады.

Тұрақты масса кезінде ортаңғы планетаның эксцентриситет амплитудасы 40 000-50 000 жылдар аралығында минимум болса, айнымалы масса кезінде бұл көрсеткіш 45 000-55 000 жылдар аралығына тән. Осы уақыт аралығында эксцентриситет амплитудасы азайып, 5 000 жылдан соң қайта өсетіндігі көрініп тұр. Ортаңғы планетаның эксцентриситет эволюциясы басқа екі планетаның эксцентриситетінен өзгеше дамыған, толығырақ айтатын болсақ амплитудасы кемімелі-өспелі аperiодты қайталанатын функция.

Тұрақты масса кезінде сыртқы планетаның эксцентриситеті аperiодты түрде 40 000 жылға дейін кеміп, аperiодты түрде қайта өсетіндігі көрініп тұр. Ал айнымалы масса кезінде эксцентриситетінің ең кіші мәні 50 000 жылға тән.



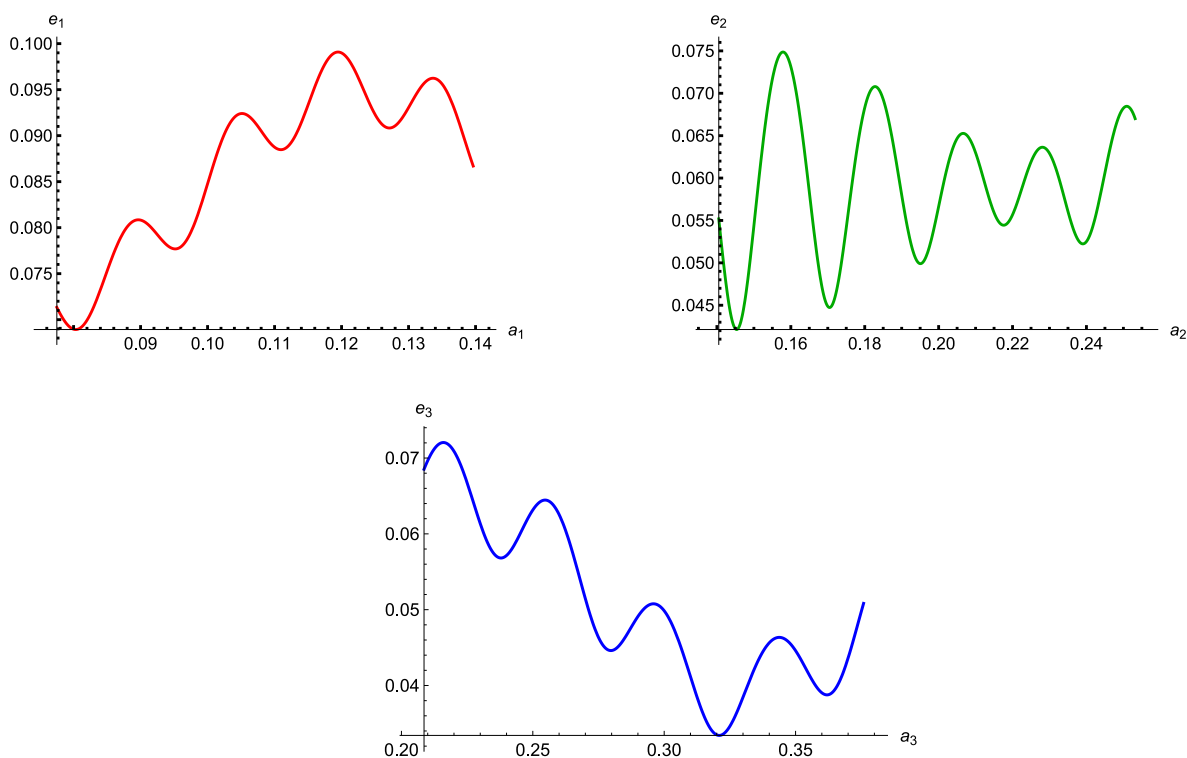
14 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында эксцентриситетінің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстырылған графиктер

15-графиктерде 3 планетаның эксцентриситеттің үлкен жарты өстен тәуелділігін көрсететін фазалық жазықтықтағы өзгерісі келтірілген. Ішкі және сыртқы планеталардың эксцентриситеттері бір-біріне кері пропорционал түрде өзгертіндігі, ал ортаңғы планета үшін аталған планеталардың үлкен жарты өсі сөнбелі-артпалы түрде тәуелділігін байқауға болады.

Орбита жазықтығының кеңістікте орналасуын анықтауға мүмкіндік беретін элементтердің графигі келесі теңдеулер көмегімен алынды:

$$\sin^2 i_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{A_i}, \quad \pi_i = -\arctg \frac{\eta_i}{\xi_i}, \quad \Omega_i = -\arctg \frac{q_i}{p_i}, \quad (6.12)$$

$$\omega_i = \pi_i - \Omega_i$$

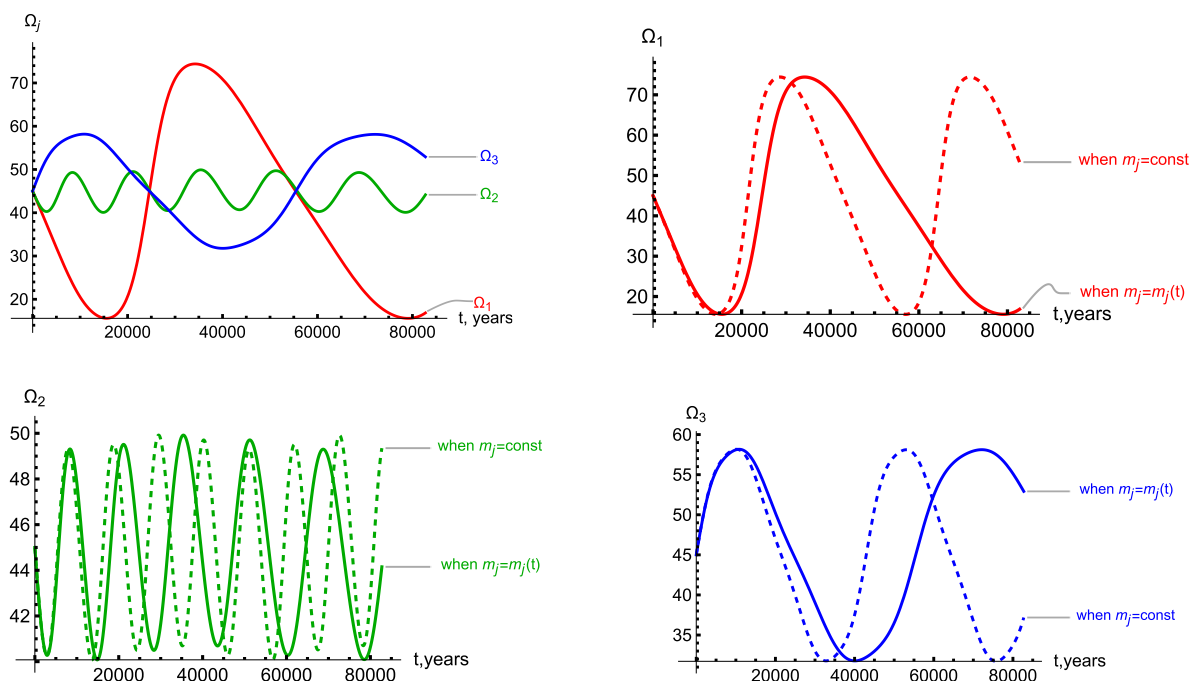


15 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында эксцентриситеттің үлкен жарты өстен тәуелділігінің фазалық жазықтығы

Қарастырылған уақыт интервалында ішкі планетаның жарқырау түйіндер сызығы бойлығының амплитудасы жоғары (35°) екендігі және сыртқы планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығына кері пропорционал өзгеретіндігі байқалады (16-сурет).

Ішкі планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығы қарастырылғын уақыт интервалында тұрақты масса кезінде шамамен 2 период жасаса, айнымалы масса кезінде 1,25 период қана жасап үлгереді.

Ортаңғы планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығы басқа екі планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлық аналогына қарағанда жиілігі жоғары аperiodты функция болып табылады. Яғни мысалға айнымалы масса кезінде ішкі планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығының периоды шамамен 55 000 жыл болса, аталған планетаның жарқырау түйіндер сызығы бойлығының периоды шамамен 10 000 жыл. Ортаңғы планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығы өте аз шамаға өсіп-кеміп отыратын және периоды уақыт бойынша артатын функция, тұрақты масса кезінде периодтың уақыт бойынша ұлғаюы айнымалы масса кезіне қарағанда өте аз шама.



16 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында жарқырау бойлығының өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру

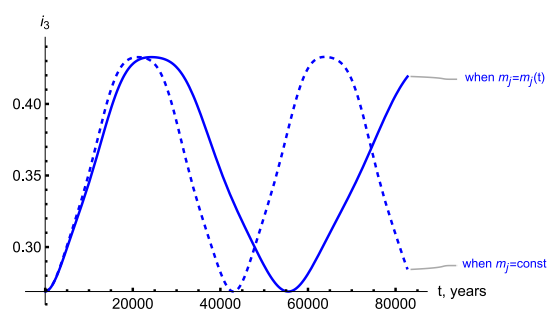
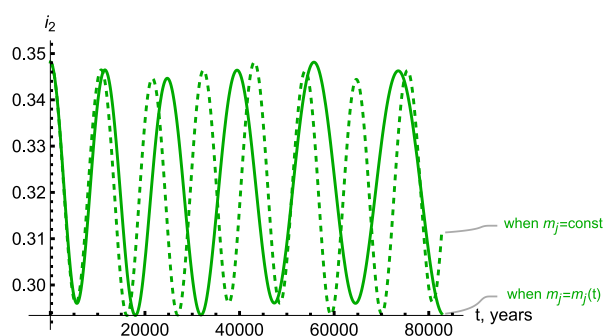
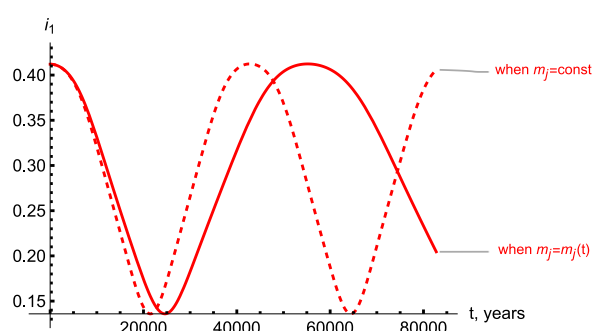
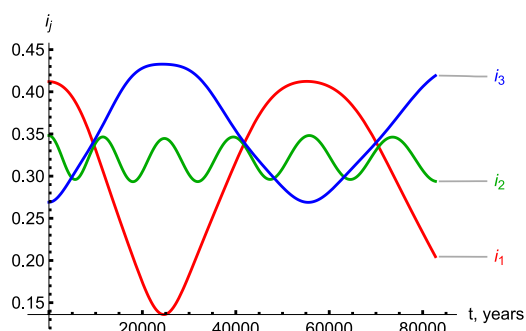
Көлбеуліктің динамикалық эволюциясын зерттейтін болсақ ішкі планетаның көлбеулік амплитудасы максималды, ортаңғы планетаның көлбеулік амплитудасы минималды мәнге ие аperiодты функция. Ортаңғы планетаның көлбеулігінің периоды ең кіші мәнге ие (17-сурет).

Айнымалы масса кезінде ішкі планета көлбеулік периоды айтарлықтай артатындығы көрініп тұр.

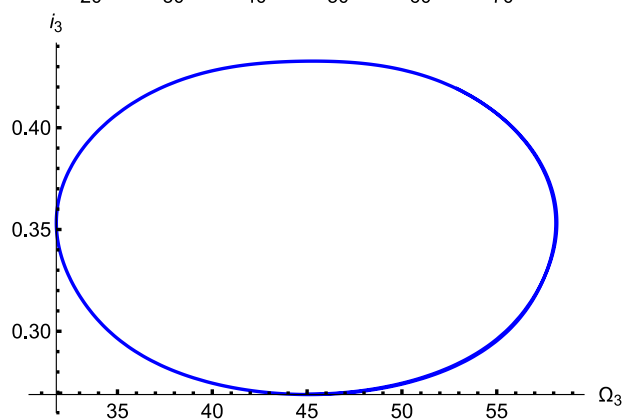
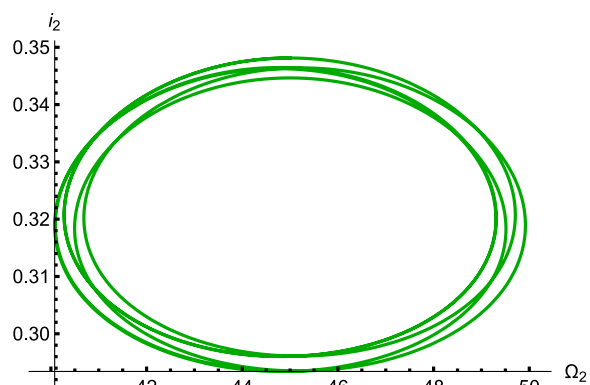
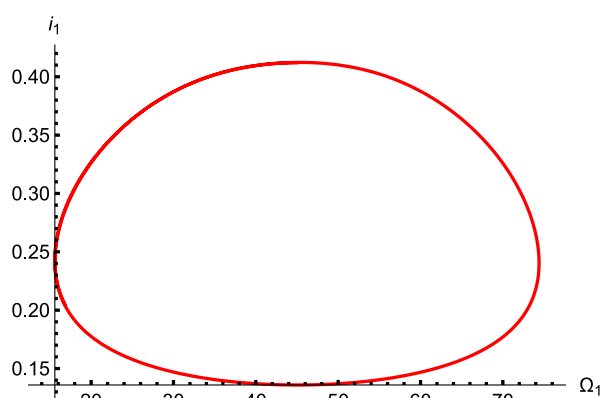
Айнымалы масса кезінде ортаңғы планета көлбеулігінің амплитудасы өте аз шамаға өсіп-кемитін, тұрақты масса жағдайына қарағанда периоды аз шамаға ғана ауытқитын квази-периодты функция. Айтарлықтай айырмашылық тек 25 000-45 000 және 55 000-75 000 жылдар аралығында байқалады.

Айнымалы масса кезінде сыртқы планета көлбеулігінің периоды айтарлықтай артатындығы және амплитудасы жағынан ішкі планетаның көлбеулігінен аз шамаға ауытқитындығы және кері пропорционал түрде өзгертіндігі көрініп тұр.

18- графиктерде 3 планетаның көлбеуліктің жарқырау түйіндер сызығы бойлығымен құратын фазалық жазықтықтағы өзгерісі келтірілген. Ортаңғы планетаның екі бұрышқа қатысты фазалық өзгерісі, басқа планеталардағы фазалық өзгерістен айырмашылығы қалыңдығы 1 градусты құратын сақинаның ішінде орындалып тұр.



17 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында орбита көлбеулігінің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



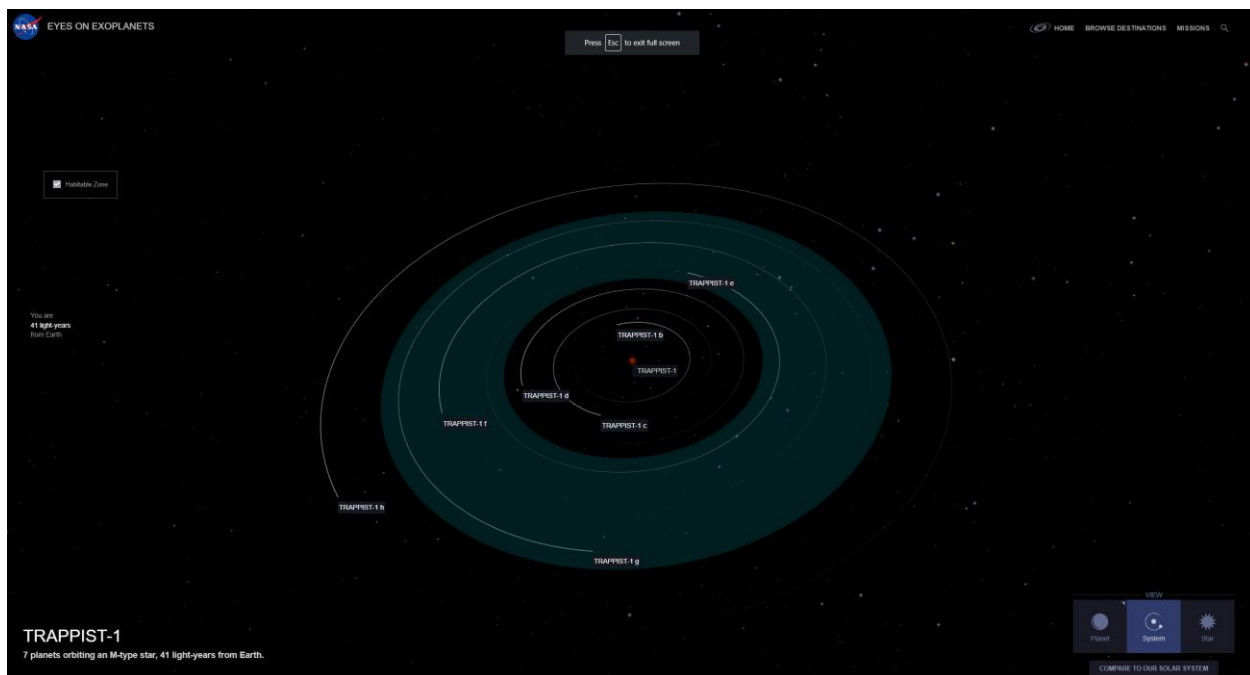
18 сурет – K2-3 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында көлбеулік пен жарқырау бойлығы арасындағы тәуелділік

6.4 *Trappist-1* экзопланета жүйесі

Trappist-1 2016 жылдан бері белгілі. Бұл жүйе бір орталық жұлдыз бен өлшемі Жерге ұқсас 7 планетасы бар жүйе (19-сурет). Бұл жүйенің келесідей альтернативті аттары бар: *2MASS J23062928-0502285* және *EPIC 246199087*. *Trappist-1* планеталарының өлшемдері 5%-тен артық дәлдікпен белгілі болса да, планета массаларының әлсіз шегіне байланысты олардың тығыздықтары 28%-ден 95%-ке дейін шамамен анықталмаған [123].

Trappist-1 Жердегі және ғарыштағы телескоптар арқылы зерттелді. Ғарыштық зерттеулер оның тек деиаметрлерін ғана анықтап қойған жоқ, сонымен қатар 7 тығыз қапталған планеталардың өзара жұқа гравитациялық әсерін де анықтады. Осының арқасында ғалымдар әр планетаның массасын анықтай алды. Сонымен біз олардың диаметрі мен массасын білеміз. Сонымен қатар орталық жұлдыздан бөлінетін энергияның қандай бөлігі планеталардың бетіне түсетіндігін білеміз. Осы 7 планетада атмосфера, мұхит, мұздықтар бар-жоқтығы туралы көптеген ақпарат белгісіз болса да, біздің Күн жүйемізге ұқсас жүйе болып отыр.

Trappist-1 – бір протопланеталық дискіде қалыптасқан жерге ұқсас планеталар тобының пайда болу эволюциясын зерттеуге тамаша мүмкіндік береді. *Trappist-1* – *M8 V* спектрлік типті ультра салқын ергежейлі жұлдыз болып табылады. Ол суқұйғыш шоқжұлдызында орналасқан. Оның өлшемі Юпитерден сәл ғана үлкен және массасы шамамен Күннің 8 процентін құрайды. Күннен 39,5 жарық жылы қашықтықта орналасқан.



19 сурет – *Trappist-1* жүйесі

[124] жұмыста *Trappist-1* планеталарына потенциалды кометалы соғылулардың әсері және осы әсерлердің планетаның алғашқы атмосферасына қалай әсер ететіндігі зерттелген. Қай планеталарда соғылу ықтималдығы басым екендігін анықтау үшін және соғылу жылдамдығының таралуын анықтау үшін потенциалды кометалардың соғылуының орбитальді эволюциясы зерттелді. Жоғары жылдамдықты соғылулар барлық жеті планетаның да алғашқы атмосферасын оп-оңай құрта алатындығы белгілі болды.

9-кестеде орталық жұлдыздың галактикадағы орнын анықтауға мүмкіндік беретін параметрлер берілген [13], [125].

9 кесте – *Trappist-1* жұлдызының параметрлері

Параметрлер	Шамалары
Параллакс	$80.451242610777669 \pm 0.12107673$ 6607856 mas
Эклиптикалық ендік	0.62982 град
Эклиптикалық бойлық	345,73685 град
Галактикалық ендік	-56,64891 град
Галактикалық бойлық	69.71519 град
Толық оң қозғалыс	$1026,5792712 \pm 8,0000000$ мас/год
Оң қозғалыс (RA)	$901,0 \pm 8,0$ мас/год
Оң қозғалыс (DEC)	$-492,0 \pm 8,0$ мас/год
Көрінетін шамалар	$V = 18,80 \pm 0,08, R = 16,47 \pm 0,07,$ $I = 14,0 \pm 0,1, J = 11,35 \pm 0,02, K =$ $10,30 \pm 0,02$

10-кестеде *Trappist-1* жұлдызының массасы, радиусы, айналу периоды және басқа да параметрлері берілген. Мұнда « $\odot$ » белгісі арқылы Күннің шамалары берілген, мысалға $M_{\odot}$ -Күн массасы және $R_{\odot}$ – Күн радиусы.

10 кесте – *Trappist-1* жұлдызының сипаттамалары

Жұлдызды ғасыр, Age (Gyr)	>0.5
Тығыздығы, $\rho_{\star}$ (g/cm^3)	75.05 (-1.66 +1.02)
Массасы, $M_{\star}$ ($M_{\odot}$)	0.0898 ± 0.0023
Радиусы, $R_{\star}$ ($R_{\odot}$)	0.1192 ± 0.0013
Айналу периоды, P_{rot} (тәулік)	1.40 ± 0.05

Орталық жұлдыз бен планеталардың параметрлері NASA экзопланета архивінен [13] алынды. Ішкі алты планета резонансты тізбек құрады, олардың орбитальді периоды (1.51, 2.42, 4.04, 6.06, 9.1 және 12,35 тәулік) кіші бүтін сандардың шамалас қатынасын құрады. Осы архитектурадан планеталардың жұлдыздан басқа жерде құрылып, миграцияға ұшырағанын болжауға негіз

болады және олар гармоникалық орбита резонансына ие [126]. Ішкі екі *Trappist-1 b* және *Trappist-1 c* планеталары Жерге қарағанда сәйкесінше төрт есе және екі есе көп сәулеленуге ие [127]. Осы себептен, бұл екі экзопланета орталық жұлдызға бір жағымен ғана қарап орналасқан деген болжам бар. Жұлдыздың белсенділігі болмағанда бұл құбылыс мүмкін болатын тірі организмдер үшін соншалықты зиян болмас па еді? Аналогты құбылыс жақын экзопланетасының барлық атмосферасын жұлдызды желдің көмегімен ұшырып жіберетін белсенділігі бар *Проксима Центавра* жүйесінде де байқалады. Зерттеушілердің есебінше, егер *Trappist-1* дәл сондай белсенді болса оған жақын орналасқан планеталары өмір сүрген уақытында жердің 15 мұхитына тең су көлемін жоғалтқан болуы мүмкін. *Trappist-1* шынымен де жеткілікті түрде белсенді жұлдыз екені кейінірек анықталды. 80 күн бақылап, зерттеушілер 42 жоғарғы энергиялық жарқылды байқады, оның бесеуі сәулеленудің мультижарқылы еді. Соңғы жарқырлар жұлдыздың барлық бағытынан энергияның көп мөлшерде шашырауын көрсетті. Осындай құбылыстың нәтижесінде *Trappist-1* жүйесінің жақын планеталары бір сәттің өзінде-ақ өзінің атмосферасының көп бөлігін жоғалтып алар еді. Осындай жарқырлардың жиілігі, ғалымдардың есебінше, 28 сағатта бір жарқырды құрап отыр. Кейінгі зерттеулерге сүйенсек, *Trappist-1* салыстырмалы түрде жас жұлдыз, оның жасы жарты миллиард жылдан аспайды. Сонымен қатар, бұл жұлдыздың жарқыр бөлуі кез-келген Жерге ұқсас жақын экзопланетаның атмосферасын 1-3 миллиард жылда ұшырып жібере алады. Жүйе экзопланеталарын бақылаудың кейбір мағлұматтары бұл экзопланеталардың әрдайым жұлдыздың қасында болмағанын, миграция жасап көшіп келгенін көрсетеді [128].

11-кестеде экзопланеталардың орбитальді элементтері келтірілген. Сонымен қатар *NASA* сайтына [13] планета үшін кей мағлұматтарды енгізіп, координаталарды алуға болады. Бұл жерде барлық кестедегі бастапқы мәндер [129], [123] және [130] жұмыстарынан жүктелген.

11 кесте – *Trappist-1* планеталарының орбита параметрлері

Планета	e	i (deg)	a (au)	ω (deg)
<i>Trappist-1 b</i>	0.00622±0.00304	89.728±0.165	0.01154±0.00010	336.86±34.24
<i>Trappist-1 c</i>	0.00654±0.00188	89.778±0.118	0.01580±0.00013	282.45±17.10
<i>Trappist-1 d</i>	0.00837±0.00093	89.896±0.077	0.02227±0.00019	-8.73±6.17
<i>Trappist-1 e</i>	0.00510±0.00058	89.793±0.048	0.02925±0.00250	108.37±8.47
<i>Trappist-1 f</i>	0.01007±0.00068	89.740±0.019	0.03849±0.00033	368.81±3.11
<i>Trappist-1 g</i>	0.00208±0.00058	89.742±0.012	0.04683±0.00040	191.34±13.83
<i>Trappist-1 h</i>	0.00567±0.00121	89.805±0.013	0.06189±0.00053	338.92±9.66

Trappist-1 b, *Trappist-1 e*, *f*, *g* және *h* экзопланеталарының тығыздығы аз. *Trappist-1 b* планетасының ядросы не кіші болуы мүмкін, не құрамында азғантай су немесе басқа да бөліне алатын заттар болуы мүмкін. *Trappist-1 f* планетасының тығыздығы жеткілікті түрде аз және мұхит-планета болуы мүмкін. Корнелла

Университетінде ұсынылған модель бойынша, егер вулкандық сутегіні климаттық температураның жоғарылауына мүмкіндік беретін потенциалды булы газ ретінде қарастырсақ, *Trappist-1* жүйесінің өмір сүру аймағы әлде қайда кең болуы мүмкін. Бұл дегеніміз, өмір сүру аумағына 3 емес, 4 планета енуі мүмкін. *Trappist-1* жұлдызының рентгендік сәулелендіруі *Проксима Центавраның* рентгендік сәулелендіруіне шамамен сәйкес келеді, ал *Trappist-1* жұлдызының хромосфералық қабатының сутегі атомдарын құратын ультракүлгін сәулеленуі *Проксима Центавраның* ультракүлгін сәулеленуінен 6 есе аз. Осы себептен де жұлдызға ең жақын *Trappist-1 b* және *Trappist-1 c* екі планетаның массасы жердікіне ұқсас болса, өздерінің атмосферасын және гидросферасын 1-3 миллиард жыл уақытында жоғалтуы мүмкін. Алайда планеталардың құрамында фотодиссоциация суы көп болса, соның есебінде атмосфера сутегі мен оттегімен толтырылып отырылады [131]. *Trappist-1 c* – жоғары тығыздыққа ие. Оның атмосферасы жүйенің басқа планеталарының атмосферасынан әлде-қайда жұқа. *Trappist-1 d* тығыздығы жерге ұқсас. *Trappist-1 e* жүйедегі тығыздығы бойынша Жерден тығыздау жалғыз планета болып табылады. Оның құрамында біздің планетаға қарағанда тығыздау темір ядро бар болуы мүмкін. 5-кестеде « $\oplus$ » индексі Жердің сипатын білдіреді: $M_{\oplus}$ - Жер массасы, $R_{\oplus}$ - Жер радиусы.

Trappist-1 b планетасының бір жылы шамамен 36 сағатқа ие. Екінші планета *Trappist-1 c* толық айналымды 2.42 жер тәулігінде жасайды. Үшінші планета *Trappist-1 d* 0.77 жер радиусына ие. Планетаның толық айналымы 4.05 тәулікке ие. *Trappist-1 e* планетасының радиусы Жер радиусымен шамалас. Бұл планетаның орбита периоды 6.1 жер тәулігіне ие. *Trappist-1 f* планетасының толық айналымы 9.2 тәулікке ие. *Trappist-1 g* алтыншы планетасының радиусы $1.13 R_{\oplus}$ -на тең, орбита периоды 12.3 тәулік. Жүйенің соңғы планетасының *Trappist-1 h* радиусы $0.75 R_{\oplus}$ -на тең, бір жыл 20 тәулікке тең [132].

12 кесте – *Trappist-1* планеталарының физикалық шамалары

Планета атауы	Планета массасы	Планета тығыздығы	Орбита периоды	Планета радиусы
	$M_p (M_{\oplus})$	$\rho \text{ (g/cm}^3\text{)}$	$P \text{ (days)}$	$R_p (R_{\oplus})$
<i>Trappist-1 b</i>	1.374 ± 0.069	$5.442 + 0.265 - 0.276$	1.510826 ± 0.000006	$1.116 + 0.014 - 0.012$
<i>Trappist-1 c</i>	1.308 ± 0.056	$5.464 + 0.221 - 0.237$	2.421937 ± 0.000018	$1.097 + 0.014 - 0.012$
<i>Trappist-1 d</i>	0.388 ± 0.012	$4.37 + 0.15 - 0.17$	4.049219 ± 0.000026	$0.788 + 0.011 - 0.010$
<i>Trappist-1 e</i>	0.692 ± 0.022	$4.90 + 0.17 - 0.18$	6.101013 ± 0.000035	$0.920 + 0.013 - 0.012$
<i>Trappist-1 f</i>	1.039 ± 0.031	$5.02 + 0.14 - 0.16$	9.207540 ± 0.000032	$1.045 + 0.013 - 0.012$

<i>Trappist-1 g</i>	1.321±0.038	5.06+0.14-0.16	12.352446±0.000054	1.129+0.015-0.013
<i>Trappist-1 h</i>	0.326±0.020	4.16+0.33-0.30	18.772866±0.000214	0.755±0.014

Белгілі масса мен радиустарды негізге ала отырып, зерттеушілер бұл жүйенің барлық экзопланеталарында су бар деп тұжырымдады. Планетадағы судың формасы жұлдыздан алатын жылудың мөлшеріне байланысты болмақ. Жұлдызға жақын планеталарда су атмосфералық бу ретінде болуы мүмкін. Алыс орналасқан планеталар мұзбен қамтылған болуы мүмкін [133]. *Trappist-1 b* экзопланетасының температурасы жоғары. *Trappist-1 c* салыстырмалы түрде жоғары температуралы. Алғашқы екі планетаның беті жоғары температуралы (+127 және +69) болғандықтан судың сұйық түрде кездесу ықтималдығы аз. Ең ішкі *Trappist-1 b* планетаның ядросы жартасты және Жерге қарағанда әлде-қайда тығыз атмосферамен қамтылған болуы мүмкін. *Trappist-1 c* жартасты ядролы, алайда *Trappist-1 b*-ге қарағанда әлде-қайда жұқа атмосфералы болуы ықтимал. *Trappist-1 d* температурасы Жердікіне ұқсас. Ол Жердің массасының шамамен 30%-ін құрайды. Алайда зерттеушілер тығыз атмосфераға ие ма, және ол мұхитты ма немесе мұзды ма екендігіне сенімді емес. Осы үш элемент планетаға ұшатын бөлшектердің «қабатын» құрады, ол планета тығыздығының мәнін білдіреді. *Trappist-1 e* және *Trappist-1 f* температурасы төмен. *Trappist-1 e* қалғандарына қарағанда жартасты планета. Зерттеушілердің болжамынша бұл планетада су сұйық түрде кездесуі мүмкін. 2017 ақпаннан бастап бұл жүйенің шынайы масштабы анықталды, зерттеушілер осы планеталарды жақсырақ сипаттау үшін және көбірек ақпарат жинау үшін аянбай еңбек етті. *Trappist-1 g* және *Trappist-1 h* өте төмен температураға ие. Соңғы төрт планетада (*e, f, g, h*) су планетаның көп бөлігін құрайды. *Trappist-1 e* осы төртеудің ішінде ең ыстығы, оның температурасы 22°C. Осындай жағдайда су тек қатты түрде болады, алайда егер планета ядросы жеткілікті түрде ыстық болса, планета бетінің астында жылы мұхит болуы мүмкін. *Trappist-1 f* планетасы алдыңғысына қарағанда салқындау. Жылдық орта температурасы 54°C, алайда атмосфераның тығыздығы есебінде планета әлде-қайда жылы. Ыстық ядросы мен геологиялық белсенділігі арқасында бұл планета ішінен өз-өзін қыздыра алады және судың сұйық күйде ұстап тұра алады. *Trappist-1 g* планетасының жылдық орта температурасы 74 °C. Атмосферасы ең тығыз, массасы 1.5 $M_{\oplus}$ -на ие. Бұл оның өте күшті геологиялық белсенділігін білдіреді. Бұл планета да өз-өзін қыздырып, суды сұйық түрде ұстап тұра алуы мүмкін [132].

6.5 Жеті планеталы сегіз дене мәселесі үшін өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесі

Өлшемсіз эволюциялық теңдеулерді $n = 7$ дербес жағдайы үшін анық түрде жазылды. P_1 планетасы үшін тек сыртқы планеталардың әсері бар

($s=0, \quad k=2,3,4,5,6,7$), ал P_2 планетасы үшін бір ішкі планетаның ұйытқуын және бес сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1, \quad k=3,4,5,6,7$) ескереміз. P_3 планетасы үшін екі ішкі планетаның ұйытқуын және төрт сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1,2, \quad k=4,5,6,7$) ескереміз. P_4 планетасы үшін үш ішкі планетаның ұйытқуын және үш сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1,2,3, \quad k=5,6,7$) ескереміз. P_5 планетасы үшін төрт ішкі планетаның ұйытқуын және екі сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1,2,3,4, \quad k=6,7$) ескереміз. P_6 планетасы үшін бес ішкі планетаның ұйытқуын және бір сыртқы планетаның ұйытқуын ($s=1,2,3,4,5, \quad k=7$) ескереміз. Ал сыртқы P_7 планета үшін тек ішкі планеталардың ($s=1,2,3,4,5,6, \quad k=0$) әсері бар.

Орбита пішінін сипаттайтын өлшемсіз теңдеулер жүйесі он төрт теңдеуден тұрады

$$\begin{aligned}
\xi_1'[\tau] &= (b_2^{1,2} + b_2^{1,3} + b_2^{1,4} + b_2^{1,5} + b_2^{1,6} + b_2^{1,7} - b_3^1) \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{1,2} \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{1,3} \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{1,4} \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{1,5} \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{1,6} \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{1,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_2'[\tau] &= b_1^{2,1} \cdot \eta_1[\tau] + (b_2^{2,1} + b_2^{2,3} + b_2^{2,4} + b_2^{2,5} + b_2^{2,6} + b_2^{2,7} - b_3^2) \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{2,3} \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{2,4} \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{2,5} \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{2,6} \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{2,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_3'[\tau] &= b_1^{3,1} \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{3,2} \cdot \eta_2[\tau] + (b_2^{3,1} + b_2^{3,2} + b_2^{3,4} + b_2^{3,5} + b_2^{3,6} + b_2^{3,7} - b_3^3) \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{3,4} \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{3,5} \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{3,6} \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{3,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_4'[\tau] &= b_1^{4,1} \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{4,2} \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{4,3} \cdot \eta_3[\tau] + (b_2^{4,1} + b_2^{4,2} + b_2^{4,3} + b_2^{4,5} + b_2^{4,6} + b_2^{4,7} - b_3^4) \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{4,5} \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{4,6} \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{4,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_5'[\tau] &= b_1^{5,1} \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{5,2} \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{5,3} \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{5,4} \cdot \eta_4[\tau] + (b_2^{5,1} + b_2^{5,2} + b_2^{5,3} + b_2^{5,4} + b_2^{5,6} + b_2^{5,7} - b_3^5) \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{5,6} \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{5,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_6'[\tau] &= b_1^{6,1} \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{6,2} \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{6,3} \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{6,4} \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{6,5} \cdot \eta_5[\tau] + (b_2^{6,1} + b_2^{6,2} + b_2^{6,3} + b_2^{6,4} + b_2^{6,5} + b_2^{6,7} - b_3^6) \cdot \eta_6[\tau] + b_1^{6,7} \cdot \eta_7[\tau] \\
\xi_7'[\tau] &= b_1^{7,1} \cdot \eta_1[\tau] + b_1^{7,2} \cdot \eta_2[\tau] + b_1^{7,3} \cdot \eta_3[\tau] + b_1^{7,4} \cdot \eta_4[\tau] + b_1^{7,5} \cdot \eta_5[\tau] + b_1^{7,6} \cdot \eta_6[\tau] + (b_2^{7,1} + b_2^{7,2} + b_2^{7,3} + b_2^{7,4} + b_2^{7,5} + b_2^{7,6} - b_3^7) \cdot \eta_7[\tau] \\
\eta_1'[\tau] &= -(b_2^{1,2} + b_2^{1,3} + b_2^{1,4} + b_2^{1,5} + b_2^{1,6} + b_2^{1,7} - b_3^1) \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{1,2} \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{1,3} \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{1,4} \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{1,5} \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{1,6} \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{1,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_2'[\tau] &= -b_1^{2,1} \cdot \xi_1[\tau] - (b_2^{2,1} + b_2^{2,3} + b_2^{2,4} + b_2^{2,5} + b_2^{2,6} + b_2^{2,7} - b_3^2) \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{2,3} \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{2,4} \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{2,5} \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{2,6} \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{2,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_3'[\tau] &= -b_1^{3,1} \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{3,2} \cdot \xi_2[\tau] - (b_2^{3,1} + b_2^{3,2} + b_2^{3,4} + b_2^{3,5} + b_2^{3,6} + b_2^{3,7} - b_3^3) \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{3,4} \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{3,5} \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{3,6} \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{3,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_4'[\tau] &= -b_1^{4,1} \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{4,2} \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{4,3} \cdot \xi_3[\tau] - (b_2^{4,1} + b_2^{4,2} + b_2^{4,3} + b_2^{4,5} + b_2^{4,6} + b_2^{4,7} - b_3^4) \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{4,5} \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{4,6} \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{4,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_5'[\tau] &= -b_1^{5,1} \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{5,2} \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{5,3} \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{5,4} \cdot \xi_4[\tau] - (b_2^{5,1} + b_2^{5,2} + b_2^{5,3} + b_2^{5,4} + b_2^{5,6} + b_2^{5,7} - b_3^5) \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{5,6} \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{5,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_6'[\tau] &= -b_1^{6,1} \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{6,2} \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{6,3} \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{6,4} \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{6,5} \cdot \xi_5[\tau] - (b_2^{6,1} + b_2^{6,2} + b_2^{6,3} + b_2^{6,4} + b_2^{6,5} + b_2^{6,7} - b_3^6) \cdot \xi_6[\tau] - b_1^{6,7} \cdot \xi_7[\tau] \\
\eta_7'[\tau] &= -b_1^{7,1} \cdot \xi_1[\tau] - b_1^{7,2} \cdot \xi_2[\tau] - b_1^{7,3} \cdot \xi_3[\tau] - b_1^{7,4} \cdot \xi_4[\tau] - b_1^{7,5} \cdot \xi_5[\tau] - b_1^{7,6} \cdot \xi_6[\tau] - (b_2^{7,1} + b_2^{7,2} + b_2^{7,3} + b_2^{7,4} + b_2^{7,5} + b_2^{7,6} - b_3^7) \cdot \xi_7[\tau]
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Орбита жазықтығының кеңістікте орналасуын сипаттайтын өлшемсіз теңдеулер жүйесі де он төрт теңдеуден тұрады

$$\begin{aligned}
p_1'[\tau] &= -(\beta_2^{1,2} + \beta_2^{1,3} + \beta_2^{1,4} + \beta_2^{1,5} + \beta_2^{1,6} + \beta_2^{1,7}) \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{1,2} \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{1,3} \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{1,4} \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{1,5} \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{1,6} \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{1,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_2'[\tau] &= \beta_1^{2,1} \cdot q_1[\tau] - (\beta_2^{2,1} + \beta_2^{2,3} + \beta_2^{2,4} + \beta_2^{2,5} + \beta_2^{2,6} + \beta_2^{2,7}) \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{2,3} \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{2,4} \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{2,5} \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{2,6} \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{2,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_3'[\tau] &= \beta_1^{3,1} \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{3,2} \cdot q_2[\tau] - (\beta_2^{3,1} + \beta_2^{3,2} + \beta_2^{3,4} + \beta_2^{3,5} + \beta_2^{3,6} + \beta_2^{3,7}) \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{3,4} \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{3,5} \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{3,6} \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{3,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_4'[\tau] &= \beta_1^{4,1} \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{4,2} \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{4,3} \cdot q_3[\tau] - (\beta_2^{4,1} + \beta_2^{4,2} + \beta_2^{4,3} + \beta_2^{4,5} + \beta_2^{4,6} + \beta_2^{4,7}) \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{4,5} \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{4,6} \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{4,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_5'[\tau] &= \beta_1^{5,1} \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{5,2} \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{5,3} \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{5,4} \cdot q_4[\tau] - (\beta_2^{5,1} + \beta_2^{5,2} + \beta_2^{5,3} + \beta_2^{5,4} + \beta_2^{5,6} + \beta_2^{5,7}) \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{5,6} \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{5,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_6'[\tau] &= \beta_1^{6,1} \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{6,2} \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{6,3} \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{6,4} \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{6,5} \cdot q_5[\tau] - (\beta_2^{6,1} + \beta_2^{6,2} + \beta_2^{6,3} + \beta_2^{6,4} + \beta_2^{6,5} + \beta_2^{6,7}) \cdot q_6[\tau] + \beta_1^{6,7} \cdot q_7[\tau] \\
p_7'[\tau] &= \beta_1^{7,1} \cdot q_1[\tau] + \beta_1^{7,2} \cdot q_2[\tau] + \beta_1^{7,3} \cdot q_3[\tau] + \beta_1^{7,4} \cdot q_4[\tau] + \beta_1^{7,5} \cdot q_5[\tau] + \beta_1^{7,6} \cdot q_6[\tau] - (\beta_2^{7,1} + \beta_2^{7,2} + \beta_2^{7,3} + \beta_2^{7,4} + \beta_2^{7,5} + \beta_2^{7,6}) \cdot q_7[\tau]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1'[\tau] &= (\beta_2^{1,2} + \beta_2^{1,3} + \beta_2^{1,4} + \beta_2^{1,5} + \beta_2^{1,6} + \beta_2^{1,7}) \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{1,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{1,3} \cdot p_3[\tau] - \beta_1^{1,4} \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{1,5} \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{1,6} \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{1,7} \cdot p_7[\tau] \\
q_2'[\tau] &= -\beta_1^{2,1} \cdot p_1[\tau] + (\beta_2^{2,1} + \beta_2^{2,3} + \beta_2^{2,4} + \beta_2^{2,5} + \beta_2^{2,6} + \beta_2^{2,7}) \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{2,3} \cdot p_3[\tau] - \beta_1^{2,4} \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{2,5} \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{2,6} \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{2,7} \cdot p_7[\tau] \\
q_3'[\tau] &= -\beta_1^{3,1} \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{3,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{3,4} \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{3,5} \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{3,6} \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{3,7} \cdot p_7[\tau] + (\beta_2^{3,1} + \beta_2^{3,2} + \beta_2^{3,4} + \beta_2^{3,5} + \beta_2^{3,6} + \beta_2^{3,7}) \cdot p_3[\tau] \\
q_4'[\tau] &= -\beta_1^{4,1} \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{4,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{4,3} \cdot p_3[\tau] + (\beta_2^{4,1} + \beta_2^{4,2} + \beta_2^{4,3} + \beta_2^{4,5} + \beta_2^{4,6} + \beta_2^{4,7}) \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{4,5} \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{4,6} \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{4,7} \cdot p_7[\tau] \\
q_5'[\tau] &= -\beta_1^{5,1} \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{5,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{5,3} \cdot p_3[\tau] - \beta_1^{5,4} \cdot p_4[\tau] + (\beta_2^{5,1} + \beta_2^{5,2} + \beta_2^{5,3} + \beta_2^{5,4} + \beta_2^{5,6} + \beta_2^{5,7}) \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{5,6} \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{5,7} \cdot p_7[\tau] \\
q_6'[\tau] &= -\beta_1^{6,1} \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{6,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{6,3} \cdot p_3[\tau] - \beta_1^{6,4} \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{6,5} \cdot p_5[\tau] + (\beta_2^{6,1} + \beta_2^{6,2} + \beta_2^{6,3} + \beta_2^{6,4} + \beta_2^{6,5} + \beta_2^{6,7}) \cdot p_6[\tau] - \beta_1^{6,7} \cdot p_7[\tau] \\
q_7'[\tau] &= -\beta_1^{7,1} \cdot p_1[\tau] - \beta_1^{7,2} \cdot p_2[\tau] - \beta_1^{7,3} \cdot p_3[\tau] - \beta_1^{7,4} \cdot p_4[\tau] - \beta_1^{7,5} \cdot p_5[\tau] - \beta_1^{7,6} \cdot p_6[\tau] + (\beta_2^{7,1} + \beta_2^{7,2} + \beta_2^{7,3} + \beta_2^{7,4} + \beta_2^{7,5} + \beta_2^{7,6}) \cdot p_7[\tau]
\end{aligned}
\tag{6.14}$$

(6.13)- (6.14) өлшемсіз эволюциялық теңдеулер жүйесіндегі белгілеулер (6.5)-(6.8) өрнектерінде көрсетілген.

6.6 Жеті планета жағдайында орбитальді элементтер аналогтарын талдау

13 кесте – *Trappist-1* жүйесінің бастапқы шарттары

	e	i^0	a (а.б.)	ω^0	Ω^0	M	k
<i>Trappist-1</i>						0.0898 $M_\odot$	$-4 * 10^{-4}$
<i>Trappist-1 b</i>	0.00622	0.4	0.01154	336.86	0.1	1.374 $M_\oplus$	7.29303^{-19}
<i>Trappist-1 c</i>	0.00654	0.3	0.01580	282.45	0.1	1.308 $M_\oplus$	2.21962^{-19}
<i>Trappist-1 d</i>	0.00837	0.1	0.02227	-8.73	0.1	0.388 $M_\oplus$	1.4269^{-19}
<i>Trappist-1 e</i>	0.00510	0.27	0.02925	108.37	0.1	0.692 $M_\oplus$	9.51264^{-20}
<i>Trappist-1 f</i>	0.01007	0.28	0.03849	368.81	0.1	1.039 $M_\oplus$	7.9272^{-20}
<i>Trappist-1 g</i>	0.00208	0.28	0.04683	191.34	0.1	1.321 $M_\oplus$	3.17088^{-20}
<i>Trappist-1 h</i>	0.00567	0.2	0.06189	338.92	0.1	0.326 $M_\oplus$	1.58544^{-20}

Орталық жұлдыз бен планеталардың бастапқы параметрлері NASA экзопланета архивінен [13] алынды.

Бірінші планетаның периоды 1.510826 тәулік = 0.0041393 жыл.

1 жылда 241.587 айналым жасайды. Шамамен 1850 жылда 446936 айналым жасайтын уақытында осы жүйенің динамикалық эволюциясы зерттелінді. Орбита элементтерінің уақыт бойынша өзгерісін және тұрақты масса жағдайымен салыстыру кезінде айырмашылық анық көріну үшін аз интервалдағы өзгерістер көрсетілген.

Орталық жұлдыз массасы $m_0 = m_0(t)$ Эдингтон-Джинс заңдылығымен, нақтырақ айтсақ, Мещерскийдің II заңы бойынша $n_0 = 3$ өзгерсін.

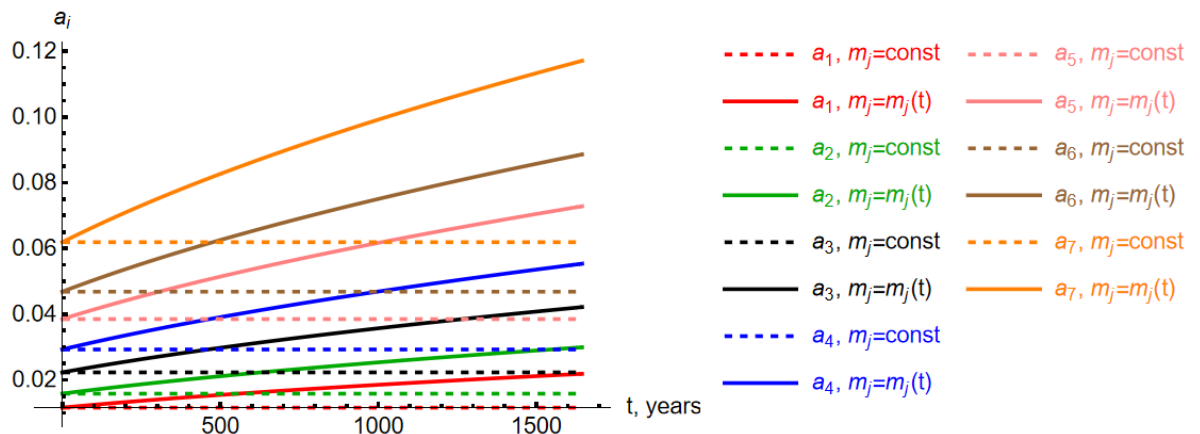
$$m_0^* = \frac{1}{(\sigma_0^{-2} - 2k_0\tau)^{1/2}} \quad (6.15)$$

Планеталардың массалары да $m_i = m_i(t)$ Эдингтон-Джинс заңы бойынша, яғни $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ Мещерскийдің I заңы бойынша өзгерсін.

$$m_i^* = \frac{1}{\sigma_i^{-1} - k_i\tau} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad (6.16)$$

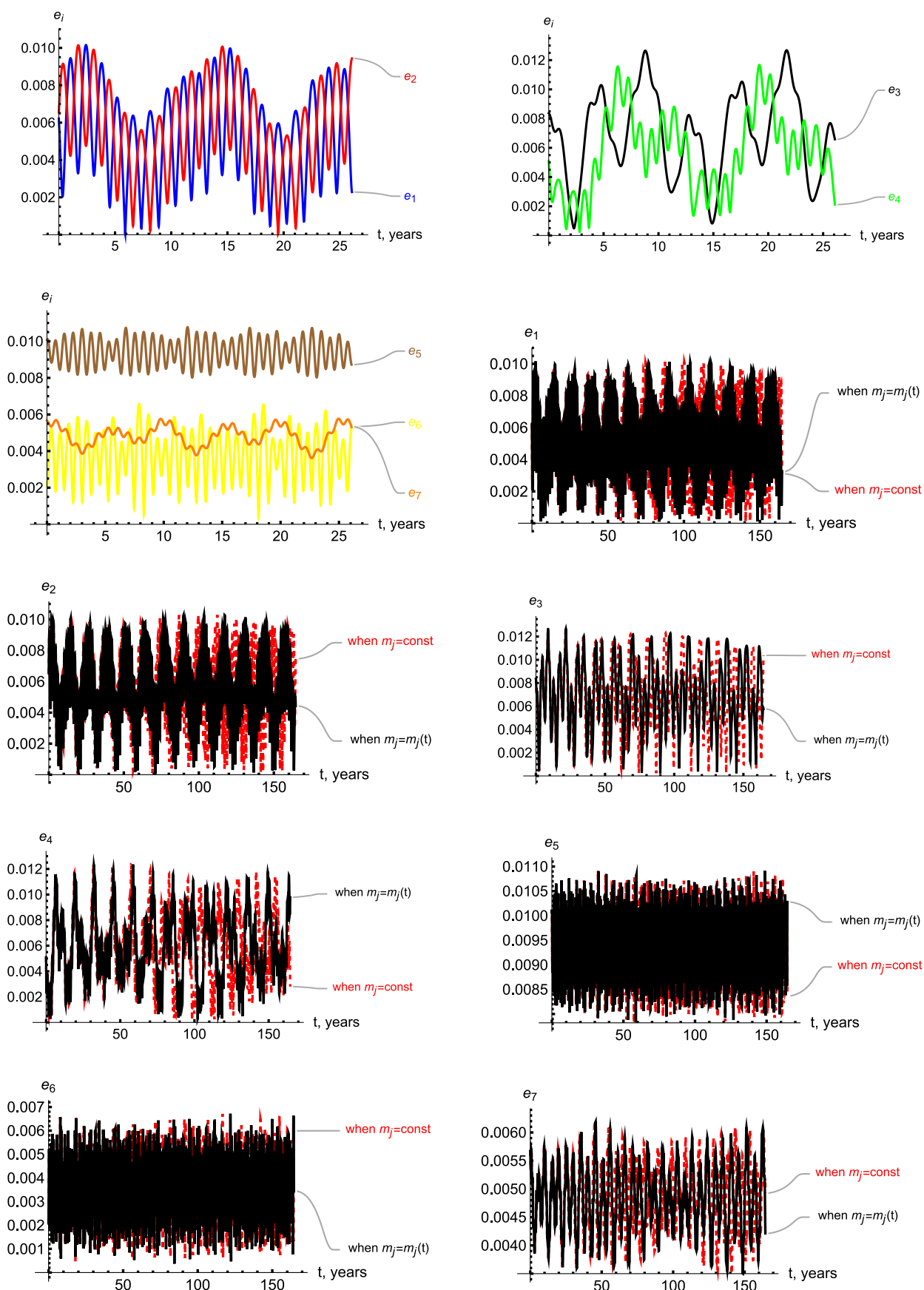
Орбита пішінін анықтауға мүмкіндік беретін элементтердің графиктері 20-22 суреттерде көрсетілген.

20-суретте үлкен жарты өстің тұрақты масса кезіндегі эволюциясынан айырмашылығы көрсетілген. Масса айнымалы жағдайда ішкі планеталардың үлкен жарты өсі аз шамаға өзгертіндігі және орталық жұлдыздан алшақтаған сайын үлкен жарты өс аналогтары көп шамаға өсетіндігін аңғаруға болады.



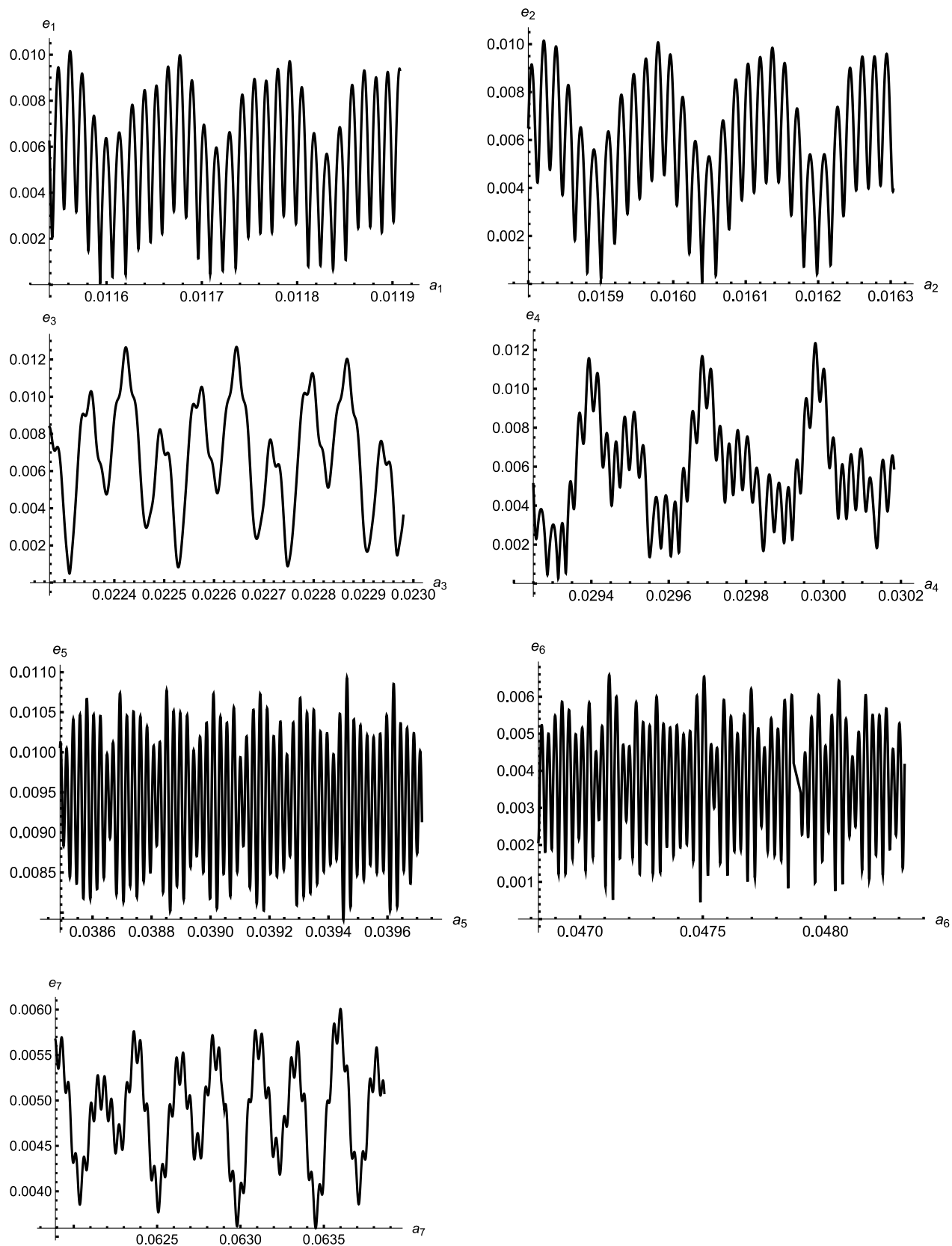
20 сурет – *Trappist-1* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында үлкен жарты өстің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру

21-графиктерде 150 жыл уақыт интервалындағы эксцентриситеттің тұрақты масса кезіндегі эволюциясынан айырмашылығы байқалады. Бұл ішкі планетаның 36 238 айналымына тең. 25 жылда ішкі планета 6040 айналым жасайды.



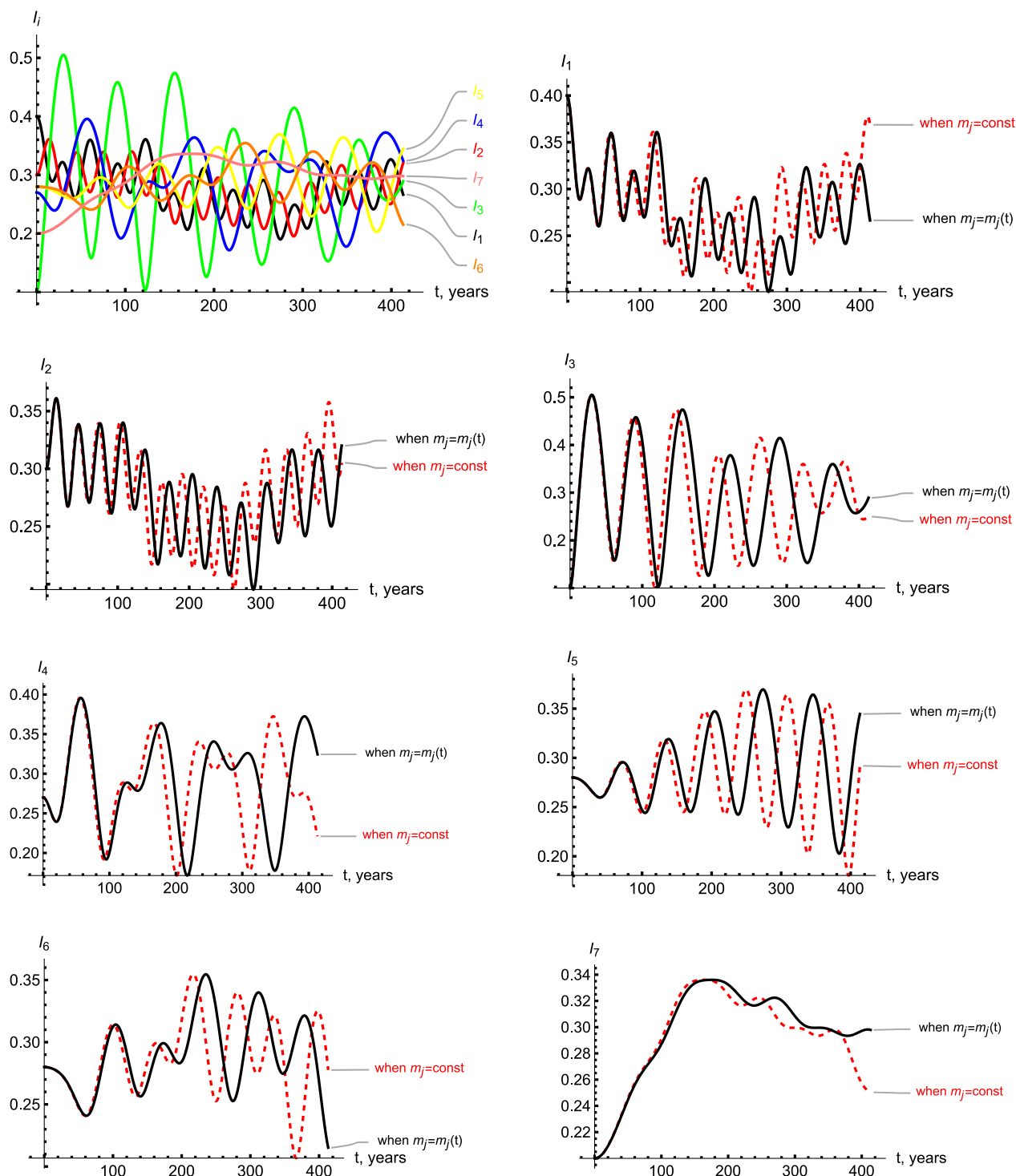
21 сурет – *Trappist-1* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында эксцентриситетінің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру

22-графиктер үлкен жарты өсі мен эксцентриситет арасындағы тәуелділік фазалық жазықтықта көрсетілген.



22 сурет – *Trappist-1* жүйе планеталарының айнымалы масса жағдайында үлкен жарты өс пен эксцентриситет арасындағы тәуелділік

Орбитаның кеңістікте орналасуын анықтауға мүмкіндік беретін элементтердің графиктері 23-суретте көрсетілген.



23 сурет – *Trappist-1* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында орбита көлбеуліктің өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру

Көлбеулік 400 жыл (ең ішкі планетаның 10^5 айналым жасауына тең) уақыт интервалындағы эволюциясын талдасақ (23-сурет), ішкі планеталардың көлбеуліктері кемімелі өспелі тербелмелі және жиілігі жоғары функциялар.

Үшінші планетаның көлбеулік амплитудасы ең үлкен шамаға тең. Төртінші планетаның көлбеулігі периодсыз түрге өзгереді. Бесінші планетаның көлбеулігі аз амплитудамен тербеліп, уақыт өткен сайын тербелмелі функцияға айналды. Алтыншы планетаның көлбеулігінің тербеліс амплитудасы сақталмайды және периодты түрде сақталмай қызықты құбылыс жасайды. Ең сыртқы планетаның көлбеулігі тербелмелі емес функция және бастапқы шамамен 150 жыл уақытында шамасы баяу өседі, алайда осы уақыттан кейін өте баяу түрде өте аз шамаға азаяды. Сонымен қатар, 23-суретте көлбеулік аналогтарының тұрақты масса кезіндегі эволюциясынан айырмашылығы байқалады.

6.7 TOI-1338 қос жұлдызды екі планеталы (2+2) жүйе орбитальді элементтер аналогтарын талдау

Төрт дене мәселесі үшін алынған теңдеулер сандық түрде шешіліп, зерттеу және талдау жұмыстары жасалынды. TOI-1338 қос жұлдызды екі планеталы экзопланета жүйесінің ғасырлық эволюциясы 70 000 жыл (серіктік жұлдыздың 5000 000 айналым жасауына кететін уақыт) зерттелінеді. Екі жұлдыз массаларын әр түрлі жылдамдықта бір-біріне тәуелсіз түрде Эддингтон-Джинс заңдылығы бойынша жоғалтады деген болжаммен дене массаларының изотропты түрде өзгеруі орбита элементтер аналогтарының ғасырлық ұйытқуларына айтарлықтай әсер етуі мүмкін екені байқалады. Мұнда орталық жұлдыздың TOI-1338A массасы $k_0 = -7.5 \times 10^{-6}$ және серіктік жұлдыз TOI-1338B массасы $k_1 = -1.56 \times 10^{-6}$ жылдамдығымен Эддингтон-Джинс заңы бойынша кемиді. Планеталардың массалары жұлдыздар массаларынан әлде – қайда аз. Зерттеу нәтижесі, планеталардың массаларының өзгерісі эволюцияға айтарлықтай әсер етпейтіндігін көрсетті. Сол себепті де планеталардың массаларын тұрақты деп болжам жасадық. TOI-1338 қос жұлдызды жүйесі үшін 14-кестедегі алғашқы шамаларды пайдаландық [134].

14 кесте – TOI-1338 жүйесінің бастапқы шарттары

$m_{00} = 1.127 M_{\odot}$	$m_{10} = 0.313 M_{\odot}$	$m_{20} = 9.90901 \times 10^{-5} M_{\odot}$	$m_{30} = 1.95778 \times 10^{-4} M_{\odot}$
	$a_{10} = 0.1321 \text{ AU}$	$a_{20} = 0.4607 \text{ AU}$	$a_{30} = 0.794 \text{ AU}$
	$e_{10} = 0.155522$	$e_{20} = 0.0880$	$e_{30} = 0.16$
	$i_{10} = 0.35^{\circ}$	$i_{20} = 0.63^{\circ}$	$i_{30} = 0.5^{\circ}$
	$\Omega_{10} = 0^{\circ}$	$\Omega_{20} = 0.91^{\circ}$	$\Omega_{30} = 40^{\circ}$
	$\omega_{10} = 117.77^{\circ}$	$\omega_{20} = 258.6^{\circ}$	$\omega_{30} = 220^{\circ}$

TOI-1338c планетасының көлбеулігі туралы деректер жоқ болғандықтан [Standing авторлары (2023)] авторларының бірімен ақылдаса отырып, $i_{30} = 0.5^{\circ}$ ақылға қонымды мәнін таңдадық. Нәтижелер TOI-1338B жұлдызының 500 000 айналым жасайтын уақыт аралығында алынды.

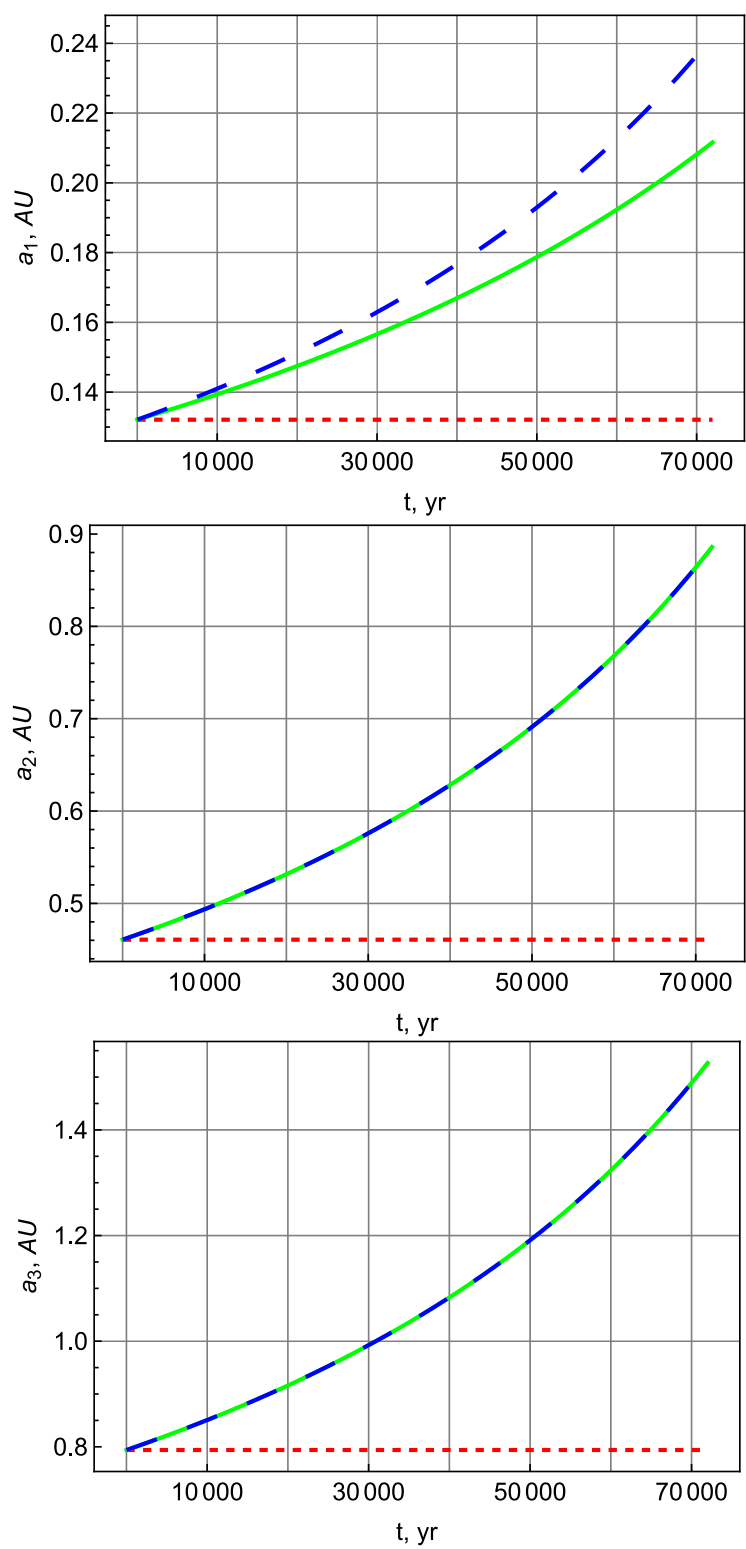
Сонымен қатар, нәтижелер үш жағдайда салыстырылды:

- а) барлық денелердің массалары тұрақты (графиктерде қысқа пунктир қисығымен көрсетіліп тұр;
- б) тек орталық жұлдыз массасын жоғалтады, ал басқа үш дене массалары тұрақты (ұзынырақ штрих қисықтарымен берілген;
- в) екі жұлдыз массаларын жоғалтады, ал планеталардың массалары тұрақты (тұтас қисықпен берілген).

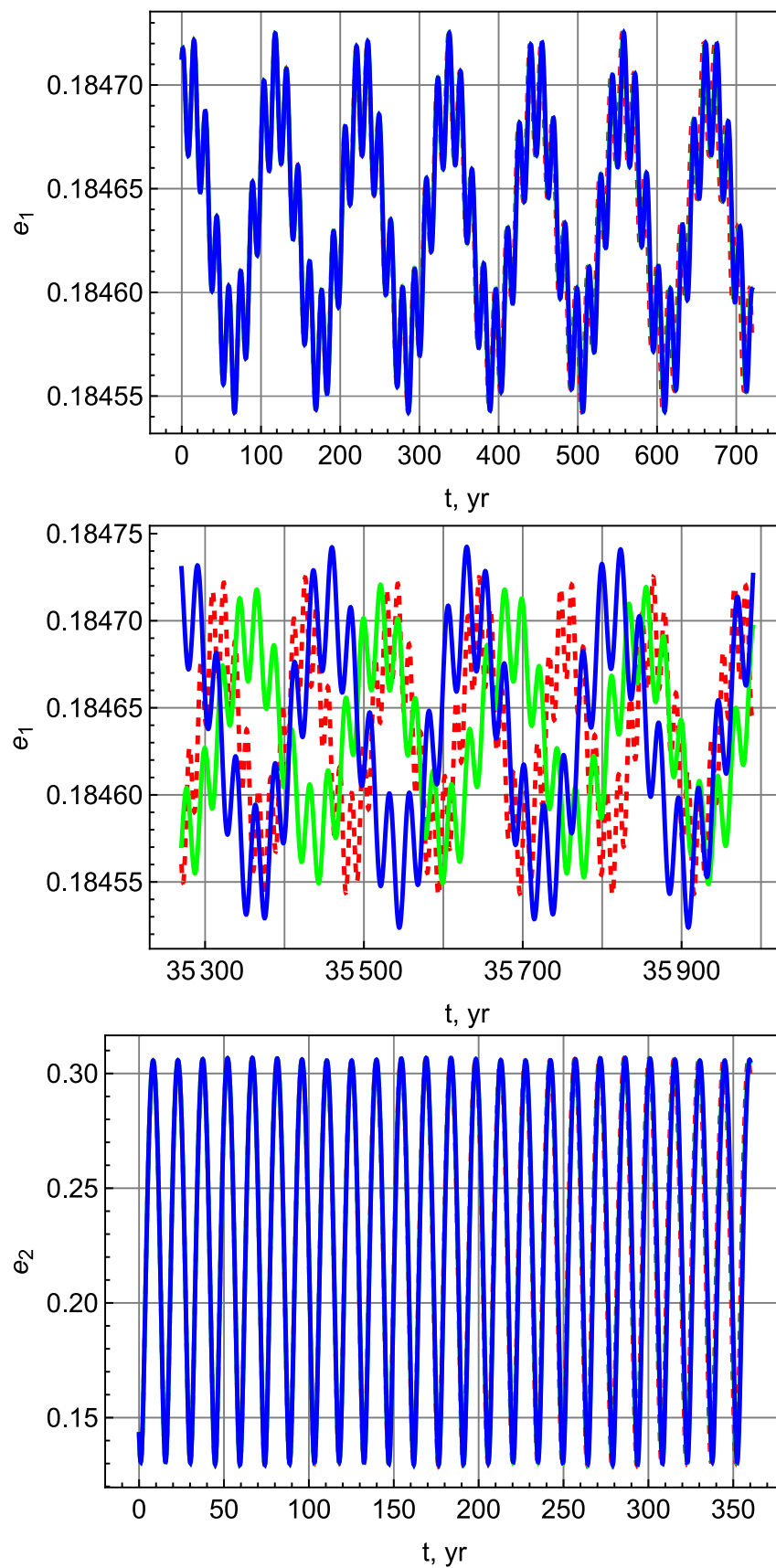
Бірінші жағдайда үлкен жарты өстер тұрақты болып қалады. Үшінші жағдайда бұл элемент уақыт бойынша артады. Екінші жұлдыздың массасының өзгеруі тек өзінің үлкен жарты өсінің өзгерісіне әсер етеді, планеталардың үлкен жарты өстерінің өзгерісіне әсер етпейді (24-сурет).

Екі жұлдыз да өз массаларын жоғалтқан кезде әр дененің эксцентриситеттің тербеліс периодтары да, екінші жағдайға қарағанда, қаттырақ артады. Екінші жұлдыздың эксцентриситетінің тербеліс амплитудасы артқан кезде планеталардың эксцентриситетінің тербеліс амплитудалары кемиді (25 – 27 суреттер).

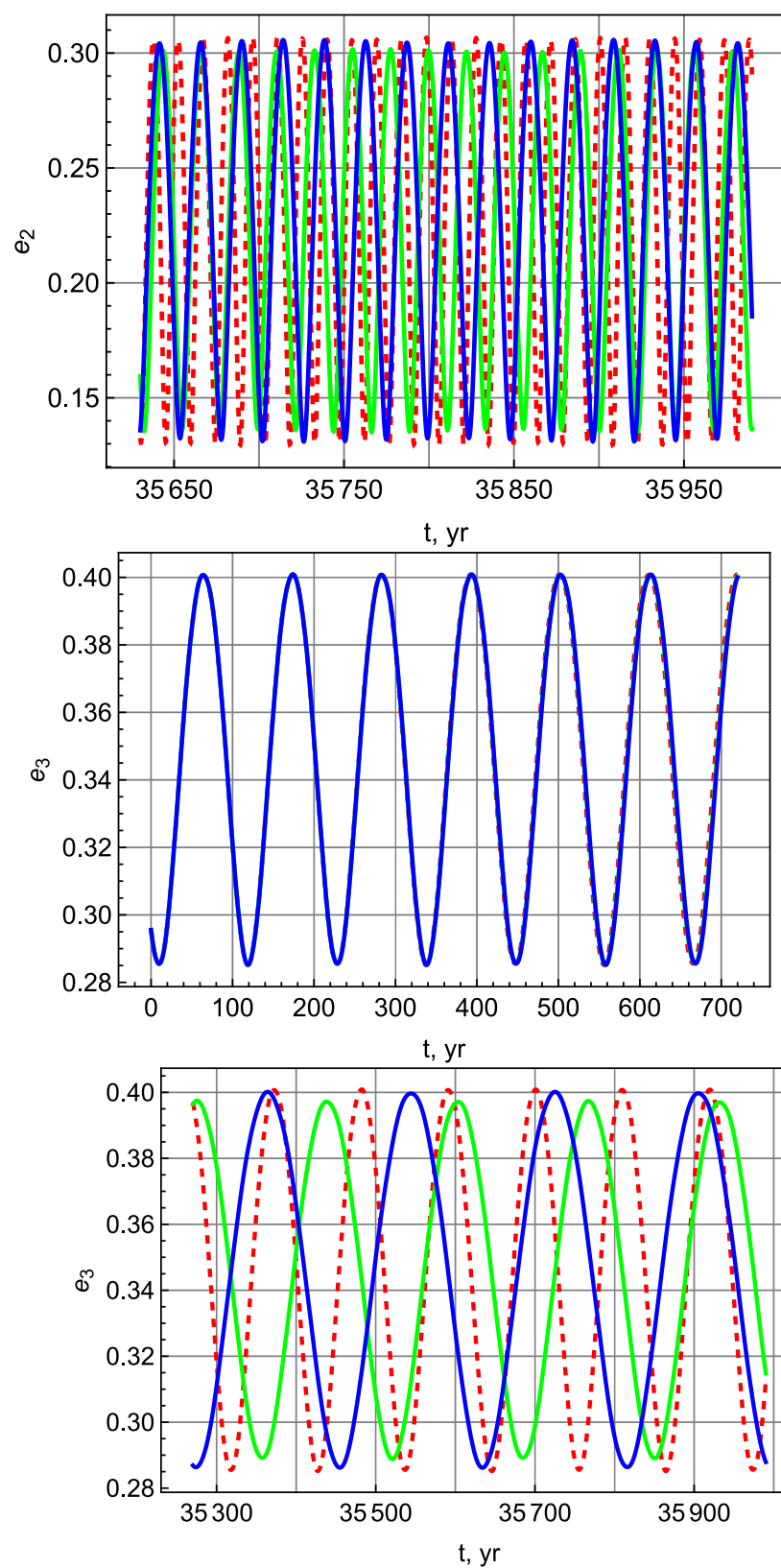
Екінші және үшінші жағдайда да барлық денелердің көлбеулігінің тербеліс периодтары және жарқырау түйіндер сызығының тербеліс периодтары артады. Бірақ, үшінші жағдайда бұл тербелістердің амплитудасы тек серіктік жұлдыз үшін көбірек артады, ал планеталар үшін шамамен тұрақты болып қалады (28 - 34 суреттер).



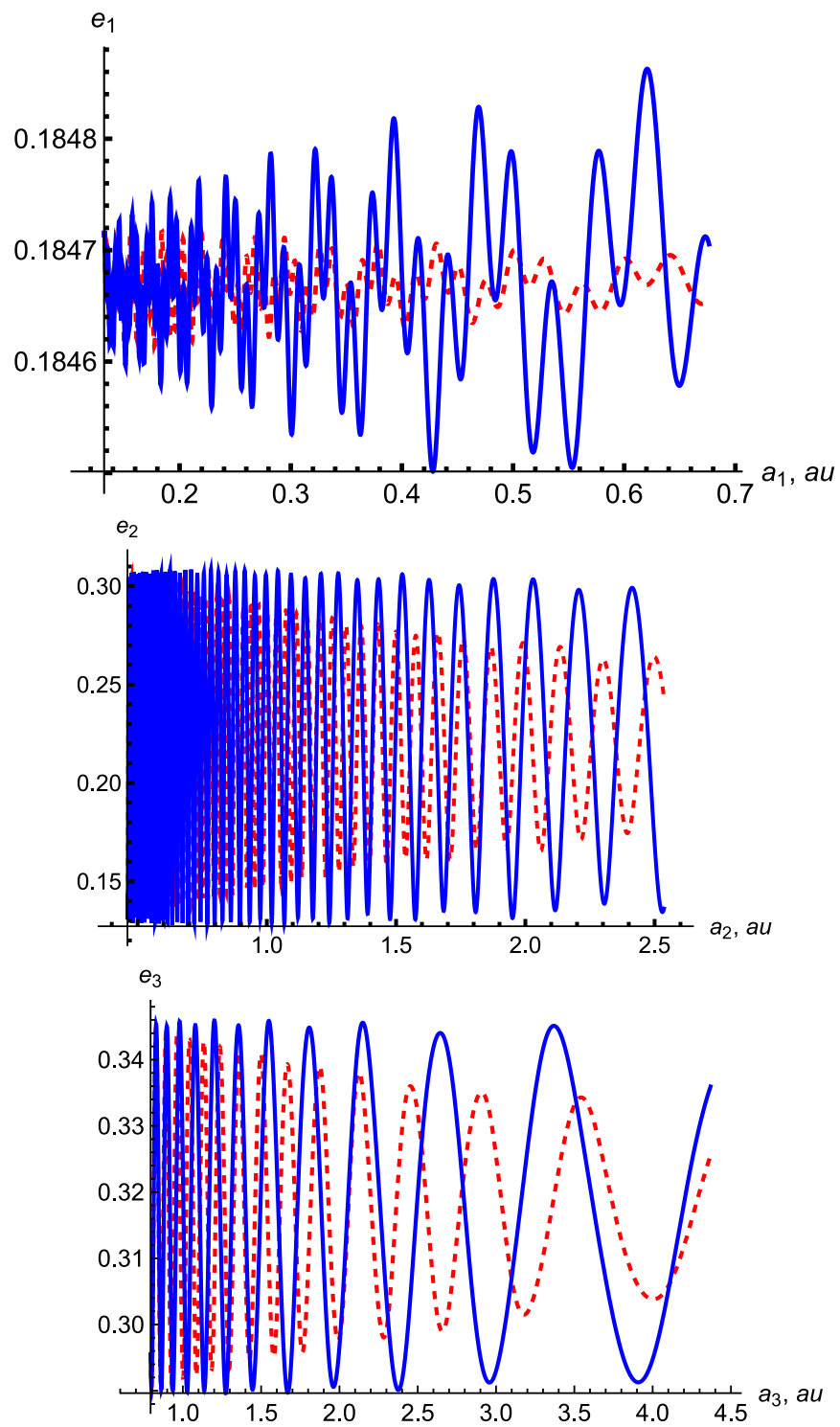
24 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында үлкен жарты өс өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



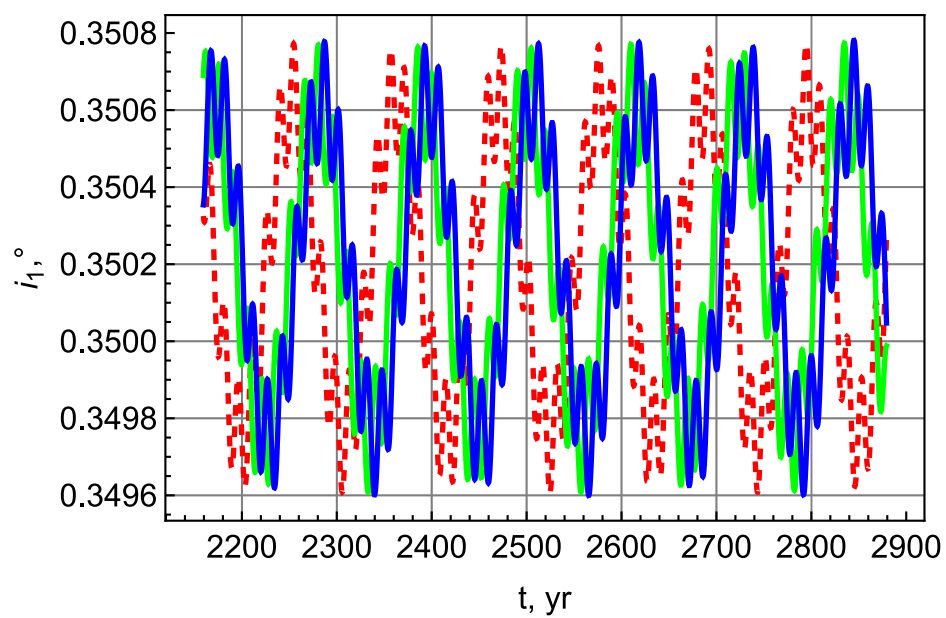
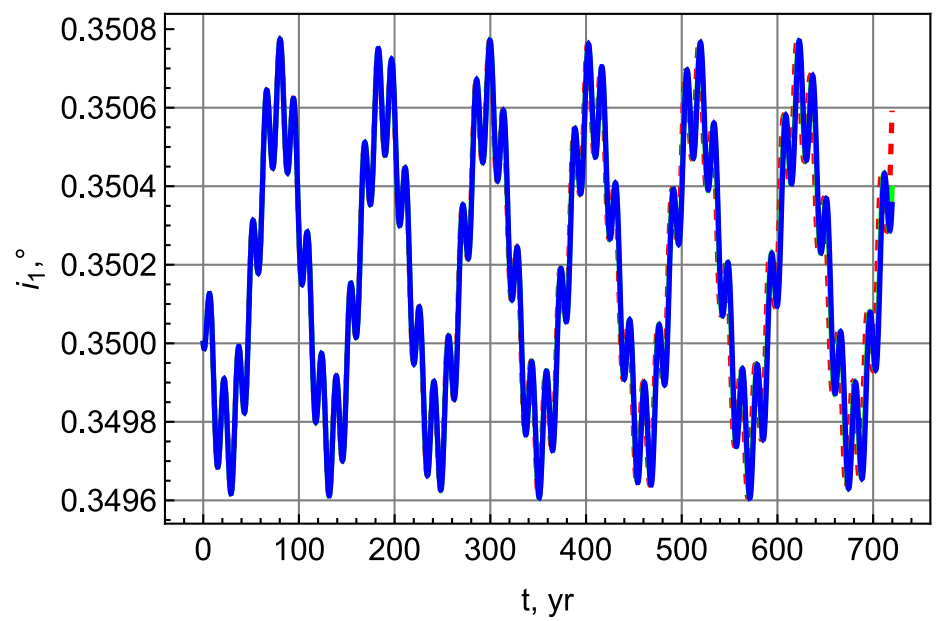
25 сурет – TOI-1338 жүйе планеталарының айналымды масса жағдайында эксцентриситет өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



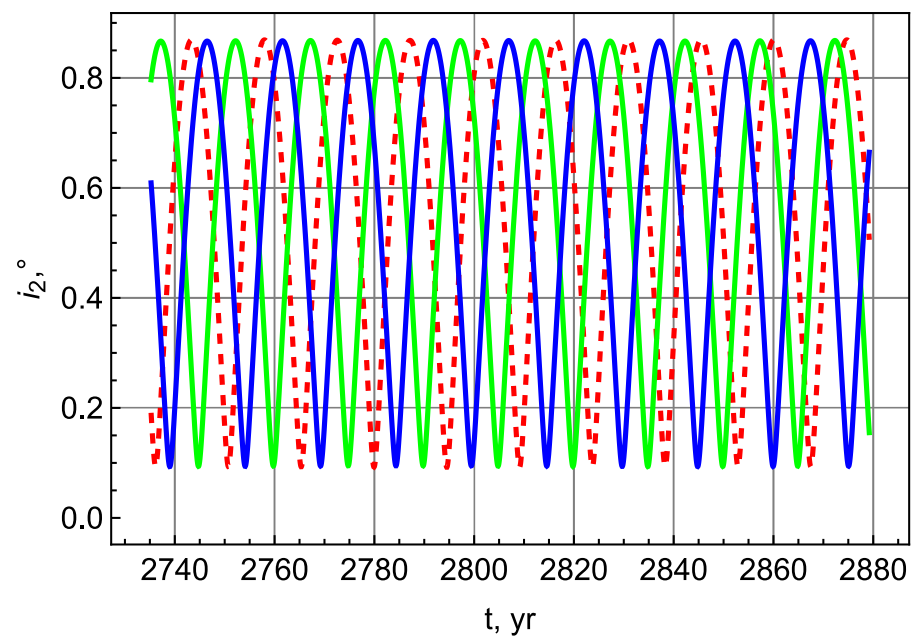
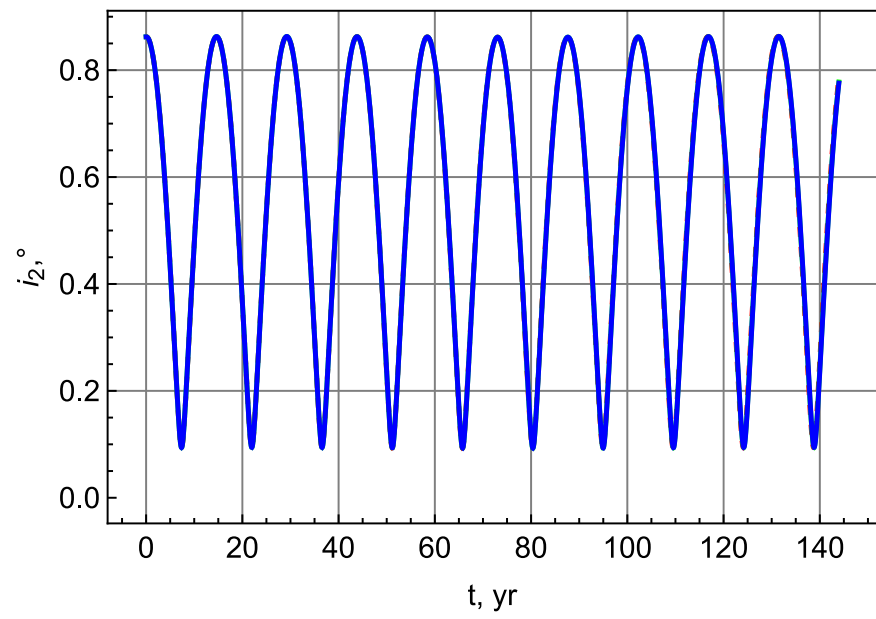
26 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында эксцентриситет өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



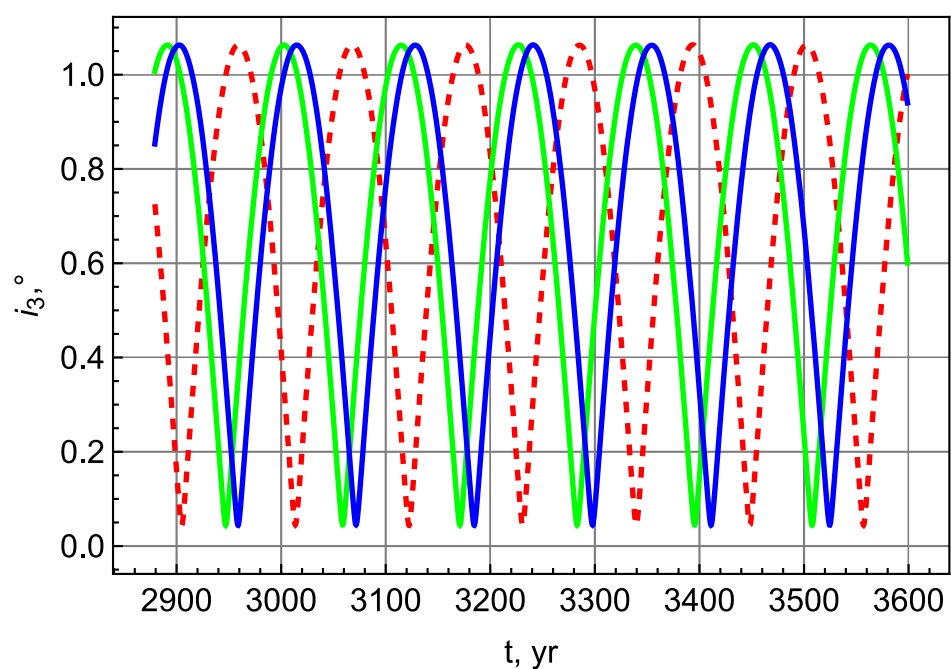
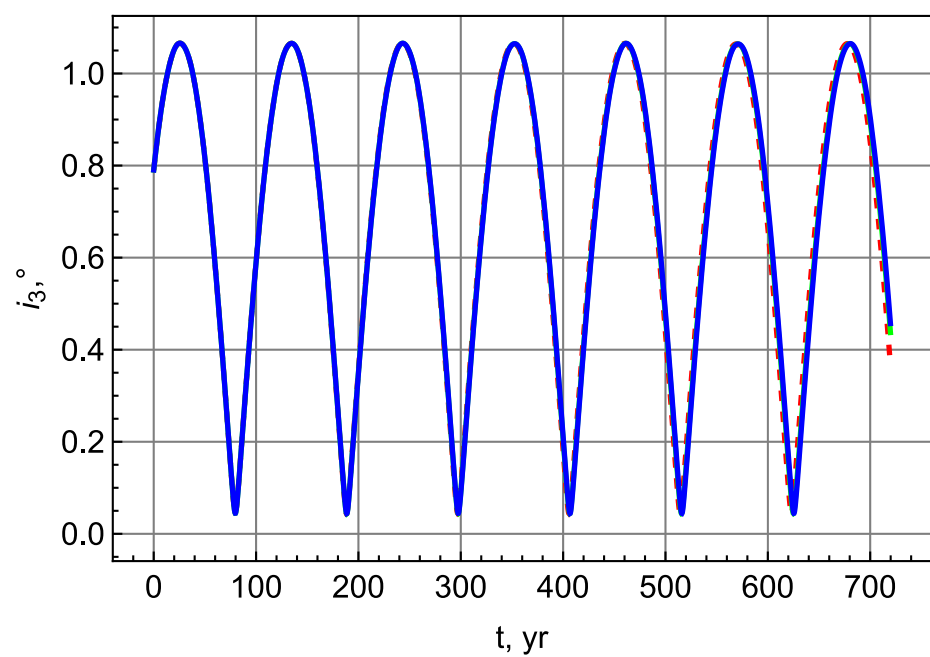
27 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айнымалы масса жағдайында үлкен жарты өсі мен эксцентриситетінің фазалық жазықтығы



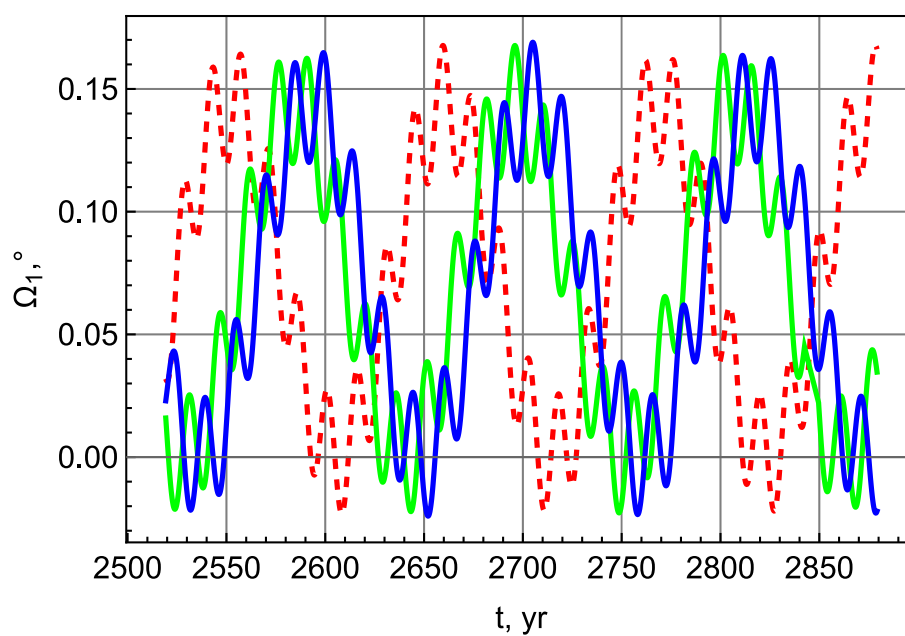
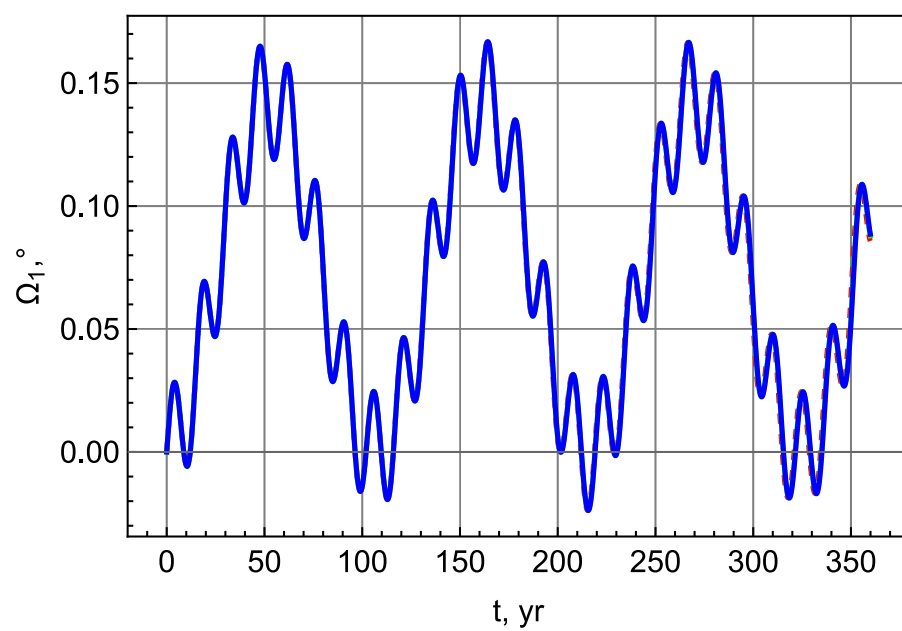
28 сурет — *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында көлбеулік өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



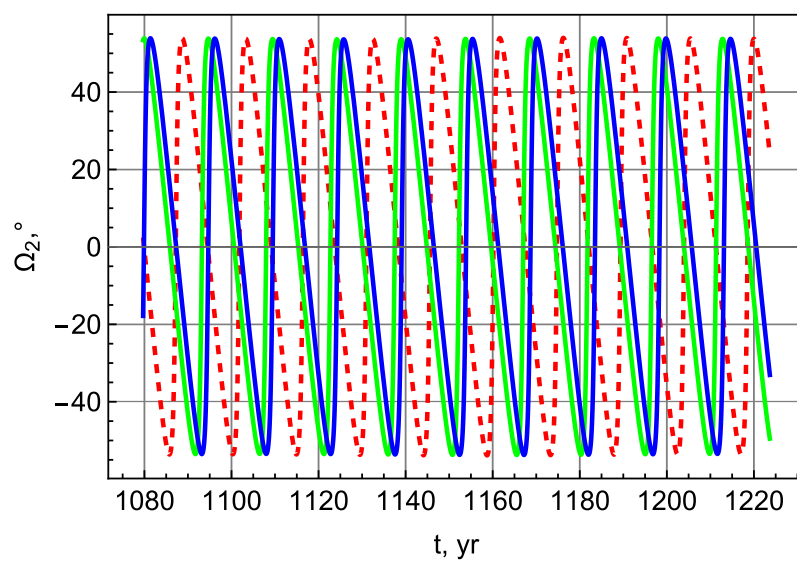
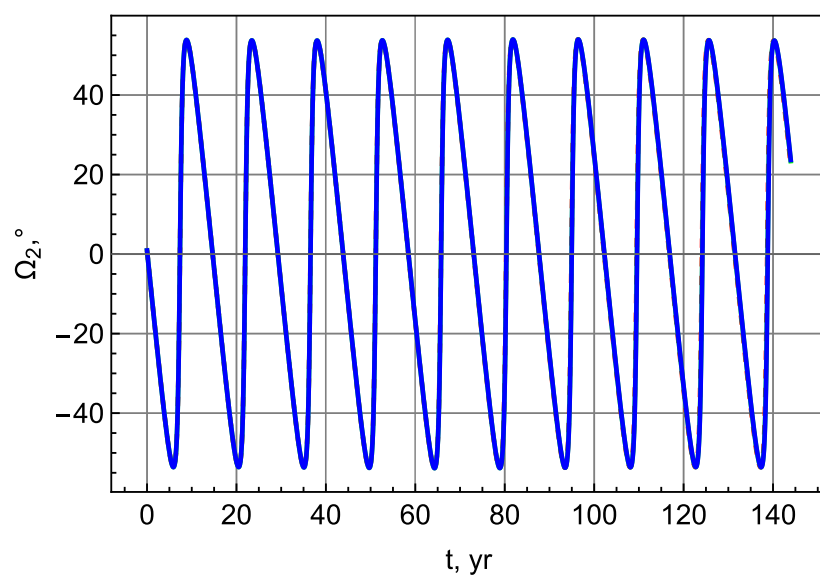
29 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында көлбеулік өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



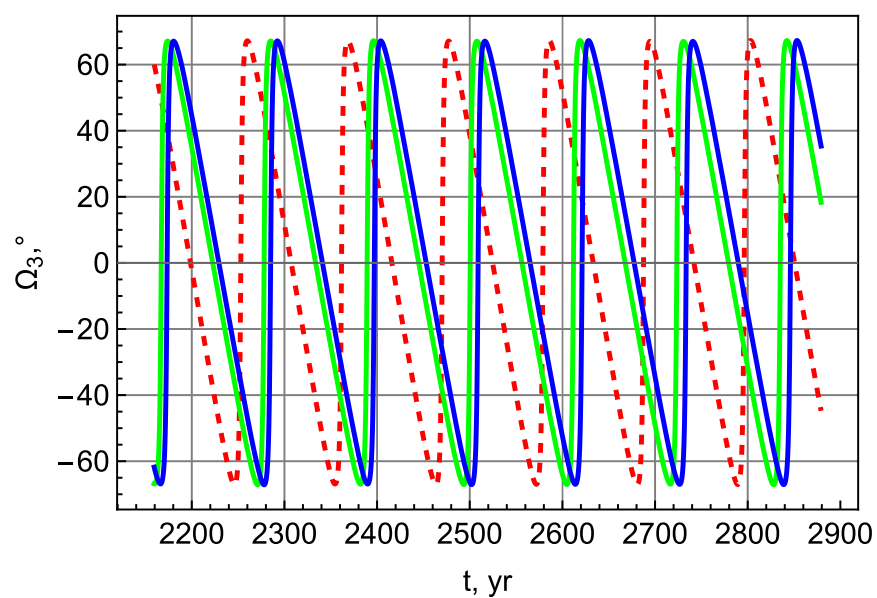
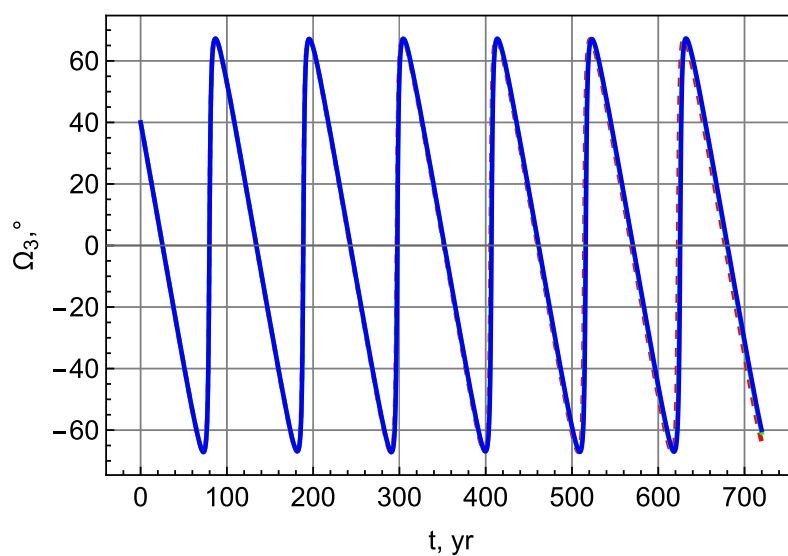
30 сурет – TOI-1338 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында көлбеулік өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



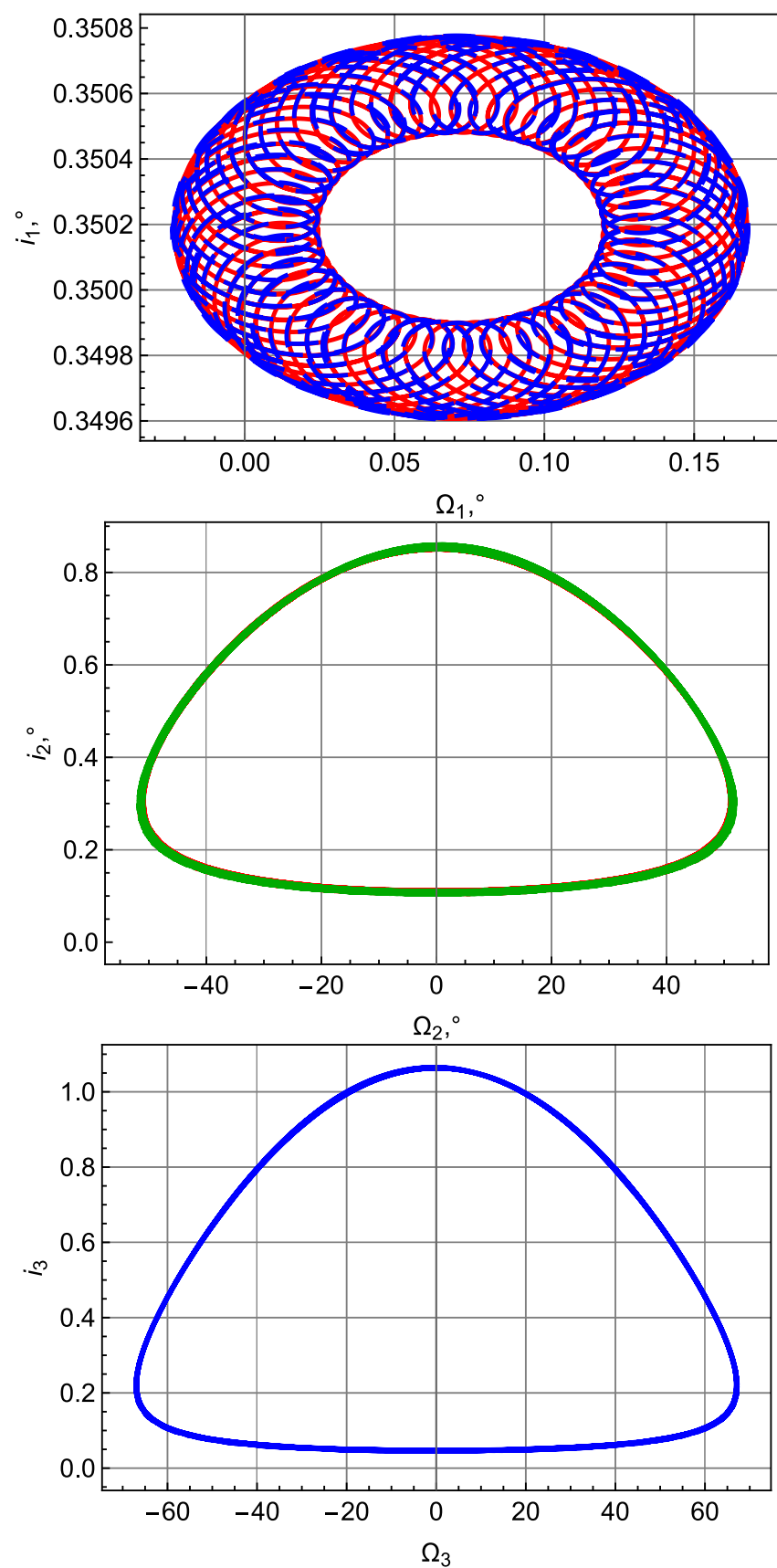
31 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында жарқырау бойлығы өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



32 сурет – TOI-1338 жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында жарқырау бойлығы өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



33 сурет – *TOI-1338* жүйе планеталарының айналмалы масса жағдайында жарқырау бойлығы өзгерісі және тұрақты масса жағдайымен салыстыру



34 сурет – TOI-1338 жүйе планеталарының айнымалы масса жағдайында жарқырау бойлығы мен көлбеулігінің фазалық жазықтығы

ҚОРЫТЫНДЫ

Сызықты автономды емес бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер Пуанкаре канондық элементтерінің екінші жүйесінің аналогтары арқылы сипатталды. Және осы эволюциялық теңдеулер орбита элементтерінің ғасырлық ұйытқуын анықтайды. Ұйытқытушы функцияны қатарға жіктеу толық сипатталды және эксцентриситет пен көлбеулік бойынша екінші реттік дәлдікке дейін (қоса есептегенде) қатарға жіктеу орындалды. Эволюциялық теңдеулер орбита пішінін сипаттайтын және орбита жазықтығының кеңістікте орналасуын сипаттайтын екі кіші жүйелерден тұрады. Эволюциялық теңдеулер Лаплас коэффициенттерінен тәуелді. Лаплас коэффициенттері бірінші текті және екінші текті эллиптикалық интегралдармен сипатталады. Алынған автономды емес канондық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің сызықтылығы біз қарастырып отырған мәселені зерттеуді жеңілдетеді.

«*Wolfram Mathematica*» символды жүйесі көмегімен массалары изотропты түрде өзгертін үш планеталы төрт дене мәселесі үшін, жеті планеталы сегіз дене мәселесі үшін және қос жұлдызды төрт дене мәселесі үшін эволюциялық теңдеулер аналитикалық түрде алынды. Алынған дифференциалдық теңдеулер Күн жүйесінен тыс жатқан нақты планеталық жүйелердің динамикалық эволюциясын зерттеу үшін қолданылады. Сонымен қатар, орталық жұлдыздың массасының азаюы мен протопланеталық дисктегі қалдықтар есебінен болатын аккреция нәтижесінде планеталардың массаларының артуы есепке алынған. Нақты экзопланета жүйелерінің динамикасын зерттеу үшін алынған эволюциялық теңдеулер өлшемсіз шамаға келтірілді.

Нақты *K2-3*, *Trappist-1*, *TOI-1338* экзопланета жүйелерінің массаларының айнымалылық әсерін талдау үшін дифференциалдық теңдеулердің өлшемсіз жүйесі сандық әдістермен шешілді.

K2-3 b планетасы 1 жылда 36.26 айналым жасайды. *K2-3 b* планетасының 3 млн айналым (82736.68 жыл) жасауына кететін уақытта, біздің есепті зерттеуге жеткілікті болып табылатын үш планета мен бір орталық жұлдыздан тұратын ең қарапайым модель кезінде, ең ішкі планетаның эксцентриситеті апериодты түрде өсетіні, ал ең сыртқы планетаның эксцентриситеті апериодты түрде кемитіндігі көрініп тұр. Ішкі планетаның эксцентриситеті сыртқы планетаның эксцентриситетінен тұрақты масса кезінде де, айнымалы масса кезінде де кері пропорционалды дамиды. Ортаңғы планетаның эксцентриситет эволюциясы басқа екі планетаның эксцентриситетінен өзгеше дамыған, толығырақ айтатын болсақ амплитудасы кемімелі-өспелі апериодты қайталанатын функция. Айнымалы масса кезінде тұрақты масса жағдайынан айырмашылығы период фазалық түрде 5000 жылға ұлғаяды.

Айнымалы масса кезінде үлкен жарты өстер өсетіндігі байқалады. Үлкен жарты өс ең ішкі планетаның 3 млн айналым уақытында екі есе өсіп кету шекарасына жеткен жоқ.

Ішкі планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығының амплитудасы және периоды максималды екендігі, ал ортаңғы планетада осы

параметрлер ең кіші екендігі байқалады. Ортаңғы планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығы басқа екі планетаның жарқырау түйіндер сызығының бойлығына қарағанда жиілігі жоғары апериодты функция болып табылады.

Ішкі планетаның көлбеулік амплитудасы максималды, ортаңғы планетаның көлбеулік амплитудасы минималды мәнге ие. Айнымалы масса кезінде ішкі және сыртқы планеталардың көлбеуліктерінің амплитудасы жағынан кері пропорционал түрде өзгертіндігі және үш планетаның да көлбеулігі периоды фазалық түрде айтарлықтай артатындығы көрініп тұр.

Ортаңғы планетаның көлбеулігі мен жарқырау түйіндер сызығы бойлығымен құратын фазалық жазықтықтағы өзгерісі, басқа планеталардағы фазалық өзгерістен айырмашылығы қалыңдығы 0,01 радиан құратын сақинаның ішінде орындалып тұр.

Көлбеуліктердің *Trappist-1b* планетасының 10^5 айналым жасауына тең (400 жыл) уақыт интервалындағы эволюциясын талдасақ, ішкі планеталардың көлбеуліктері кемімелі өспелі тербелмелі және жиілігі жоғары функциялар. Үшінші планетаның көлбеулік амплитудасы ең үлкен шамаға тең. Төртінші және алтыншы планеталардың көлбеулік амплитудалары сақталмайды және периодсыз қызықты құбылыс жасайтын функция. Бесінші планетаның көлбеулігі аз амплитудмен баяу тербелісін бастап, уақыт өткен сайын тербелмелі функцияға айналды. Ең сыртқы планетаның көлбеулігі тербелмелі емес функция және бастапқы шамамен 150 жыл уақытында шамасы баяу өседі, алайда осы уақыттан кейін өте баяу түрде өте аз шамаға азаяды.

Үлкен жарты өстер тұрақты масса кезіндегі эволюциясынан айырмашылығы байқалады. Масса айнымалы жағдайда ішкі планеталардың үлкен жарты өс аналогтары аз шамаға өзгертіндігі және орталық жұлдыздан алшақтаған сайын үлкен жарты өс көп шамаға өсетіндігі көрініп тұр.

TOI-1338 қос жұлдызды екі планеталы экзопланеталы жүйенің динамикалық эволюциясы *TOI-1338B* жұлдызының 500 000 айналым жасайтын уақыт аралығында зерттелінді және нәтижелер үш жағдайда салыстырылды (а. барлық денелердің массалары тұрақты; ә. тек орталық жұлдыз массасын жоғалтады, ал басқа үш дене массалары тұрақты және б. екі жұлдыз массаларын жоғалтады, ал планеталардың массалары тұрақты).

Екі жұлдыз да өз массаларын жоғалтқан кезде әр дененің эксцентриситетінің тербеліс периодтары да, екінші жағдайға қарағанда, қаттырақ артады. Екінші жұлдыздың эксцентриситетінің тербеліс амплитудасы артқан кезде планеталардың эксцентриситетінің тербеліс амплитудалары кемиді.

Екінші және үшінші жағдайда да барлық денелердің көлбеуліктері тербеліс периодтары және жарқырау түйіндер сызығының тербеліс периодтары артады. Бірақ, үшінші жағдайда бұл тербелістердің амплитудасы тек серіктік жұлдыз үшін көбірек артады, ал планеталар үшін шамамен тұрақты болып қалады.

Бірінші жағдайда үлкен жарты өс аналогтары тұрақты болып қалады. Үшінші жағдайда бұл элемент уақыт бойынша артады. Екінші жұлдыздың

массасының өзгеруі тек өзінің үлкен жарты өсінің өзгерісіне әсер етеді, планеталардың үлкен жарты өстерінің өзгерісіне әсер етпейді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем Метагалактики.- Алма-Ата: Наука, 1975. - 143 с.
- 2 Omarov T.B. Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy //New-York: Nova Science Publ.Inc., - 2002. - P. 260.
- 3 Bekov A.A., Omarov T.B. The theory of orbits in non-stationary stellar systems //Astronomical and Astrophysical Transactions, - 2003. - Vol. 22, № 2. - P. 145-153. doi: 10.1080/1055679031000084803
- 4 Минглибаев М.Дж., Омаров Т.Б. К нестационарным модельным задачам небесной механики //Труды АФИ АН КазССР. -Алма-Ата: Наука, - 1984. -Т. 43, - С. 3-11.
- 5 Minglibayev M.Zh., Omarov Ch. T., Ibraimova A.T. New forms of the perturbed motion equation //Reports of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan, - 2020. - Vol. 2, № 330, - P. 5-13. doi: 10.32014/20200.2518-1483.25
- 6 Минглибаев М. Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. - Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. - 224 с. ISBN:978-3-659-29945-2
- 7 Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M. Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses //Astronomy Reports, - 2014. - Vol. 58, № 9. - P. 667-677. doi: 10.1134/S1063772914090066
- 8 Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U. Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates // Mathematics in Computer Science. Springer international publishing, - 2017. - Vol. 11, № 334. - P. 383-391.
- 9 Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Shomshekova S.A. Applications of Computer Algebra in the Study of the Two-Planet Problem of Three Bodies with Variable Masses //Programming and Computer Software, - 2019. - Vol. 45, № 2. - P. 73–80. doi:10.1134/S0361768819020087
- 10 Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Shomshekova S.A. Computing Perturbations in the Two-Planetary Three-Body Problem with Masses Varying Non-Isotropically at Different Rates // Mathematics in Computer Science, – 2020. – Vol.14, № 2. - P. 241-251. <https://doi.org/10.1007/s11786-019-00437-0>
- 11 Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B. Differential equations of planetary systems //Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, - 2020. - Vol. 2, № 330. - P. 14-20. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1483.26>

- 12 Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Kosherbaeva A.B. Derivation of Evolutionary Equations in the Many-Body Problem with Isotropically Varying Masses Using Computer Algebra //Programming and Computer Software, - 2022. - Vol. 48, № 2, - P. 107–115. doi: 10.1134/S0361768822020098
- 13 NASA Exoplanet Archive, url: <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>
- 14 NASA Exoplanet Archive Portal, url: <https://filtergraph.com/nea/default/index/4707728>
- 15 Exoplanets, url: <https://exoplanets.nasa.gov/>
- 16 Perminov A.S., Kuznetsov E.D. The Implementation of Hori–Deprit Method to the Construction Averaged Planetary Motion Theory by Means of Computer Algebra System Piranha //Mathematics in Computer Science, - 2020. -Vol. 14, № 2. - P. 305-316. doi:10.1007/s11786-019-00441-4
- 17 Санникова Т.Н., Холшевников К.В. Движение в центральном поле при возмущающем ускорении, постоянном в сопровождающей системе отсчета, связанной с радиус-вектором //Астрон. журн., - 2015. - Vol. 92, № 8. - С. 681-692.
- 18 Чазов В.В. Построение модели вековых возмущений //Астрономический вестник, - 2013. -Т. 47, № 2. - С. 112-121. doi: 10.7868/S0320930X13010015.
- 19 Вековая эволюция элементов орбит планет Солнечной системы, <http://vadimchazov.narod.ru/secequat.htm>
- 20 Холшевников К.В., Мюллери А.А., Толумбаева Д.А., Вавилов Д.Е. Определение первоначальных орбит внесолнечных планет методом лучевых скоростей: замкнутые формулы //Вестник СПбГУ, - 2011. - Т. 1, № 3. - С. 143-152.
- 21 Холшевников К.В., Толумбаева Д.А., Мюллери А. А. Определение первоначальных орбит внесолнечных планет методом лучевых скоростей: степенные ряды //Вестник СПбГУ, - 2011. - Т. 1, № 1. - С. 166-172.
- 22 Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам //Астрон. вестн., - 2001. - Т. 35, №3. - С. 267–272.
- 23 Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Разложение гамильтониана двухпланетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам: применение пуассоновского процессора //Астрон. вестн., - 2004. - Т. 38, № 2. - С. 171–179.
- 24 Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Динамическая эволюция слабозвозмущенной двухпланетной системы на космогоническом интервале времени: система Солнце-Юпитер-Сатурн //Астрон. вестн., - 2006. - Т. 40, № 3. - С. 263-275.
- 25 Кузнецов Э.Д., Холшевников К.В. Орбитальная эволюция двухпланетной системы Солнце – Юпитер – Сатурн //Вестник СПбГУ, - 2009. - Т. 1. - С. 139-150.
- 26 Belkina S.O. , Kuznetsov E.D. Orbital flips due to solar radiation pressure for space debris in near-circular orbits //Acta Astronautica, - 2021. - Vol. 178, - P. 360–369. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2020.09.025>

- 27 Kuznetsov E.D., Rosaev A.E., Plavalova E., Safronova V.S., Vasileva M. A. A Search for Young Asteroid Pairs with Close Orbits //Solar System Research, - 2020, - Vol. 54, № 3. - P. 236-252. doi: 10.1134/s0038094620030077
- 28 Перминов А.С., Кузнецов Э.Д. Орбитальная эволюция внесолнечных планетных систем HD 39194, HD 141399 и HD 160691 //Астрономический журнал, 2019. - Т. 96, № 10. - С. 795-813. doi: 10.1134/S1063772919090075
- 29 Perminov A.S., Kuznetsov E.D. The orbital evolution of the Sun–Jupiter–Saturn–Uranus–Neptune system on long time scales //Astrophysics and Space Science, - 2020. - Vol. 365, № 8. - P. 144. doi: 10.1007/s10509-020-03855-w
- 30 Kuznetsov E.D. Orbital evolution of phaethon cluster //Meteoritics & Planetary Science, -2021. -Vol. 56, № 2609. - P. 1.
- 31 Акулова Н.А., Бузникова Л.А., Шатина А.В. Влияние взаимных гравитационных возмущений планет солнечной системы на эволюцию эксцентриситетов и наклонов их орбит //Russian Technological Journal, - 2017. - Vol. 5, № 3. - P. 130-137. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-3-130-137>
- 32 Плохотников К.Э. Об устойчивости гравитационной системы многих тел //Компьютерные исследования и моделирование, - 2021. - Vol. 13, № 3, - P. 487–511. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-3-487-511>
- 33 Gylden H. Die Bahnbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, dass die Massen Veränderungen unterworfen sind //Astronomische Nachrichten, - 1884. - Vol. 109. - P. 1-6.
- 34 Mestschersky J. Ein Specialfall des Gyldén'schen Problems (A. N. 2593) //Astronomische Nachrichten, - 1893, - Vol. 132, № 9. - P. 129-130. <https://doi.org/10.1002/asna.18931320902>
- 35 Mestschersky J. //Astronomische Nachrichten, - 1902. -Vol. 159. - P. 229. <http://dx.doi.org/10.1002/asna.19021591502>
- 36 Dufour C. //Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, - 1866. - Т. 62, - С. 840-842.
- 37 Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. - М.: ГИТТЛ, 1949. - 276 с.
- 38 Jeans J. H. MNRAS, - 1924. - Vol. 85. - P. 2.
- 39 Abad A., Calvo M., Docobo J.A., Elipe A. On the orbital elements of the two-body problem with slowly decreasing mass: the Gylden-Mestchersky cases //The Astronomical Journal. - 2020. - Vol. 160, № 5, - P. 12.
- 40 Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде /Гельфгат Б.Е.; опубл. 1959, Бюл. института теоретической астрономии. - Т. 7, №5, 354-363 с.
- 41 Гельфгат Б.Е., К задаче двух тел переменной массы при наличии возмущающей силы пропорциональной скорости. //Доклады на научных конференциях. Математика, астрономия, физика, техника. – Ярославль, 1962. - Т. 1, № 3. - 147 с. url: <https://cat.webtute.ru/pub.php?id=10029>.

- 42 Гельфгат Б.Е. Обобщение задачи двух тел переменной массы и ее строгие решения //Тр. третьих чтений К.Э. Циолковского. Механика космического полета. - Калуга, 1968. 86-101 с.
- 43 Berkovich L.M. Gylden-Mescerskii problem //Celestial Mechanics, - 1981. - Vol. 24, № 4. - P. 407-429.
- 44 López G.V., Juárez E.M. Damping-Antidamping Effect on Comets Motion //Journal of Modern Physics, - 2013. - Vol. 4. - P. 12. doi: 10.4236/jmp.2013.412204
- 45 Prieto C., Docobo J.A. Analytic solution of the two-body problem with slowly decreasing mass //Astronomy and Astrophysics, - 1997. - Vol. 318, № 2. - P. 657-661.
- 46 Deprit A. The secular accelerations in Gyldens Problem //Celestial Mechanics, - 1983. - Vol. 31, № 1. - P. 1-22.
- 47 Разбитная Е.П. Задача двух тел с переменными массами: классификация различных случаев //Астрон. ж., - 1985. - Т.62, № 6. - С. 1175-1181.
- 48 Поляхова Е.Н. Небесно механические аспекты задачи двух тел с переменными массами: современное состояние проблемы //Астрон. ж., - 1994. - Т.71, № 2, - С. 321.
- 49 Майлыбаев А.Т. Ограниченная задача двух тел переменной массы и размеров: автореф. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.02.01. - Алма-Ата: КазГУ, 1990. - 20 с.
- 50 Байдолда Ф. Гравитациялаушы және кедергілі ортадағы бейстационар үш ості эллипсоид тартылыс өрісіндегі материялық нүктенің қозғалысы: автореф. ...физ.-мат. ғыл. канд.: 01.03.01. - Алматы: В.Г. Фесенков атындағы Астрофизикалық институт, 2010. - 22 с.
- 51 Omarov T.B. Two-body motion with corpuscular radiation //Astronomicheskii Zhurnal, - 1963. - Vol. 40, - P. 921.
- 52 Hadjidemetriou J.D. Secular variation of mass and the evolution of binary systems //Advances in Astronomy and Astrophysics. - 1967. - Vol. 5. - P. 131-188.
- 53 Prieto C., Docobo J.A. Analytic Solution of the Two-Body Problem with Slowly Decreasing Mass //Astronomy and Astrophysics, - 1997. - Vol. 318. - P. 657.
- 54 Luk'yanov L.G. Conservative two-body problem with variable masses //Astronomy Letters, - 2005. - Vol. 31. - P. 563-568. <https://link.springer.com/article/10.1134/1.2007033>
- 55 Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс //Астрон. журн., - 2008. - Т. 85, № 8. - С. 755-768.
- 56 Luk'yanov L.G. Astron. Rep., - 2008. - Vol. 52. - P. 680.
- 57 Bekov A.A. Integrable cases and trajectories in the Gylden-Meshcherskii problem //Soviet Astronomy, - 1989. - Vol. 33, № 1. - P. 71-78.
- 58 Gelf'gat B.E. Modern Problems of Celestial Mechanics and Astrodynamics //Nauka, - 1973. - P. 7.
- 59 Bekov A.A. Sov. Astr., - 1988. - Vol. 32. - P. 106.

- 60 Bekov A.A. Sov. Astr., - 1991. - Vol. 35. - P. 103.
- 61 Luk'yanov L.G. Particular Solutions in the Restricted Problem of Three Bodies with Variable Masses //Soviet Astronomy, - 1989. - Vol. 33, № 1. - P. 92-95.
- 62 Luk'yanov L.G. //Sov. Astr., - 1989. - Vol. 33. - P. 194.
- 63 Luk'yanov L.G. //Astron. Let., - 2009. - Vol. 35. - P. 349.
- 64 Singh J., Leke O. Solutions to the restricted three-body problem with variable mass //Astrophys. Space Sci., - 2010. - Vol. 326. - P. 305.
- 65 Ferrari F., Lavagna M. Periodic motion around libration points in the Elliptic Restricted Three-Body Problem //Nonlinear Dynamics, - 2018. - Vol. 93, № 6. - P. 453-462. doi: 10.1007/s11071-018-4203-4
- 66 Орлов А.А. О лагранжевых частных решениях в задаче трех тел с переменными массами //Астрон. журн., - 1939. - Т. 16, № 6. - С. 52-56.
- 67 Лукьянов Л.Г. О частных решениях фотогравитационной задачи трех тел //Астрон. журн., - 1986. - Т. 63, № 4. - С. 784-790.
- 68 Abdullah A.A., Mehtab A., Kalu R.M., Ashraf A. Properties of motion of the infinitesimal variable mass body in the well known circular restricted three-body problem with Newtonian and Yukawa potential //Applied Mathematics & Information Sciences, - 2021. - Vol.15, № 2. - P. 189-197. doi:10.18576/amis/150211
- 69 Омаркулов К.С. Движение тел в нестационарных нецентральных полях. - Кокшетау: [б. и.], 2001. - 146 с.
- 70 Patricio S.L., Tiago A.da S. Solutions to the restricted three-body problem with variable mass //Astrophysics and Space Science, - 2011. - Vol. 332, - P. 325-329. <https://doi.org/10.1007/s10509-010-0554-0>
- 71 Омаров Т.Б. Задача трех тел при нестационарном ньютоно-гуковском взаимодействии и применении ее к движениям в Метагалактике //Астрон. журн., - 1972. - Т. 49, № 1. - С. 191-196.
- 72 Lukyanov L.G. On the restricted circular conservative three-body problem with variable masses //Astronomy Lett.,- 2009. - Vol. 35, № 05. - P. 349–359.
- 73 Singh J., Effect of perturbations on the non linear stability of triangular points in the restricted three-body problem with variable mass //Astrophys. Space Sci., - 2009. - Vol. 321, № 2. - P. 127–135.
- 74 Zhang M.J., Zhao C.Y., Xiong Y.Q. On the triangular libration points in photo-gravitational restricted three-body problem with variable mass //Astrophys. Space Sci., - 2012. - Vol. 337, - P. 107–113. doi: 10.1007/s10509– 011–0821–8
- 75 Abouelmagd E.I., Mostafa A. Out of plane equilibrium points locations and the forbidden movement regions in the restricted three-body problem with variable mass //Astrophys. Space Sci., - 2015. - Vol. 357, № 58. - P. 1-10. doi: 10.1007/s10509– 015–2294–7
- 76 Abdullah A.A. The photogravitational circular restricted four-body problem with variable masses //Journal of Engineering and Applied Sciences, - 2016. - Vol. 3, № 2. - P. 30-38.

- 77 Chakraborty A., Narayan A. BiElliptic Restricted Four Body Problem //Few-Body Systems, - 2019. - Vol. 60, № 1. - P. 1-20. doi: 10.1007/s00601-018-1472-x
- 78 Liu C., Gong S. Hill stability of the satellite in the elliptic restricted four-body problem //Astrophysics and Space Science, - 2018. - Vol. 363, № 8, - P. 1-9. doi:10.1007/s10509-018-3381-3
- 79 Ansari A.A. The circular restricted four- body problem with triaxial primaries and variable infinitesimal mass //Applications and Applied Mathematics: An International Journal, -2018. - Vol. 13, № 2. - P. 818–838.
- 80 Ansari A.A., Kellil R., Ali A., Alam M. Cyclic kite configuration in the restricted five-body problem with variable mass //Applications and Applied Mathematics: An International Journal, - 2019. - Vol. 14, № 2. - P. 985–1002.
- 81 Лукьянов Л.Г. Об уравнениях движения задачи многих тел с переменными массами //Астрон. ж., – 1983. – Т. 60, № 1. - С. 181-194.
- 82 Zink J.K., Batygin K., Adams F.C. The Great Inequality and the Dynamical Disintegration of the Outer Solar System //The Astronomical Journal, - 2020. - Vol. 160, № 5. - P. 1-9. doi: 10.3847/1538-3881/abb8de.
- 83 Соколов Л.Л., Холшевников К.В. Об интегрируемости задачи N тел //Письма в АЖ, - 1986. - Т. 12, № 7, - С. 557-561.
- 84 Veras D., Hadjidemetriou J.D., Tout C.A. An exoplanet's response to anisotropic stellar mass-loss during birth and death //MNRAS, - 2013. - Vol. 435, № 3. - P. 2416-2430.
- 85 López E.L., López G.V., and Kemp S.N. Analytical Model for the Dynamical Motion of the Bulges of Two Interacting Galaxies //The Astronomical Journal, - 2018. - Vol. 156, № 5. - P. 1-6. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae08c>
- 86 López G., López E., Analytical Approximation to the Dynamics of a Binary Stars System with Time Depending Mass Variation //Journal of Applied Mathematics and Physics, - 2018. - Vol. 6, № 3. - P. 613-619. doi: 10.4236/jamp.2018.63053
- 87 Velázquez G., Prieto C. About One-Dimensional Conservative Systems with Position Depending Mass //Journal of Modern Physics, - 2014. - Vol. 5, № 9. - P. 900-907. doi: 10.4236/jmp.2014.59093
- 88 Encyclopaedia of exoplanetary systems, url: <http://exoplanet.eu>
- 89 Marov M.Ya., Shevchenko I.I. Exoplanets: nature and models //Phys. Usp., - 2020. - Vol. 63. - P. 837–871. doi: 10.3367/UFNr.2019.10.038673
- 90 Dumusque X., et.al. An Earth-Mass Planet Orbiting α Centauri B //Nature, - 2012. - Vol. 491. - P. 207-211. doi: 10.1038/nature11572
- 91 Anglada-Escudé. G., et.al. A Terrestrial Planet Candidate in a Temperate Orbit around Proxima Centauri //Nature, - 2016. - Vol. 536, - P. 437-440. <https://doi.org/10.1038/nature19106>
- 92 Захожай В.А. Космические тела Галактики: классификация и эволюция //Astronomical School's Report, - 2002. - Vol. 3, № 2. - P. 81-99.

- 93 Gray, Christopher J. C. History of Spectral Classification. Stellar Spectral Classification. //Richard O. Princeton University Press, - 2009. - P. 1–31.
- 94 A note on the spectral atlas and spectral classification, url: <https://lweb.cfa.harvard.edu/~pberlind/atlas/htmls/note.html>
- 95 The classification of stellar spectra, url: <https://www.astro.princeton.edu/~burrows/classes/204/stellar.atmospheres.HR.pdf>
- 96 Harvard spectral classification, Cosmos, <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/h/harvard+spectral+classification>
- 97 Exoplanets Yale Astronomy, url: <http://exoplanets.astro.yale.edu/science/mtok.php>
- 98 Raymond S.N., Izidoro A., Morbidelli A. Solar System Formation in the Context of Extra-Solar Planets // arXiv:1812.01033 [astro-ph.EP], - 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.01033>
- 99 Batygin K., et.al. A quasi-stationary solution to gliese 436b's eccentricity //Astrophys. J., - 2009. - Vol. 699, № 23. doi:10.1088/0004-637X/699/1/23
- 100 Correia A.C., et.al. Tidal damping of the mutual inclination in hierachical systems //Astron. Astrophys., - 2013. - Vol. 553, № A39. doi:10.1051/0004-6361/201220482
- 101 Van Laerhoven C., Greenberg R. Characterizing Multi-planet Systems with Classical Secular Theory //Mech. Dyn. Astron., - 2012. - Vol.113 - P. 215. doi: 10.1007/s10569-012-9410-6
- 102 Chrenko O., Broz M., Lambrechts M. Eccentricity excitation and merging of planetary embryos heated by pebble accretion //Astron. Astrophys, - 2017. - Vol. 606, - P. 114. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201731033>
- 103 Eklund H., Masset F.S. Evolution of eccentricity and inclination of hot protoplanets embedded in radiative discs //Mon. Not. R. Astron. Soc., -2017. -Vol. 469. - P. 206. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx856>
- 104 Marov M.Ya. The Fundamentals of Modern Astrophysics. A Survey of the Cosmos from the Home Planet to Space Frontiers //New York: Springer, - 2015. doi:10.1007/978-1-4614-8730-2
- 105 Marov M.Ya. The formation and evolution of the solar system //Oxford Research Encyclopedia of Planetary Science, - 2018. № 2. doi: 10.1093/ACREFORE/9780190647926.013.2
- 106 Сурдин В.Г. Рождение звезд. - М.: Эдиториал УРСС; Издание 2-е, доп., 1999. – 232 с.
- 107 Karttunen H. et al. Fundamental Astronomy. - London: Springer, 2017. - 550 p. doi:10.1007/978-3-662-53045-0 22
- 108 Veras D. Post-main-sequence planetary system evolution //Royal Society open science, - 2016. - Vol. 3, № 2. - P. 1-65. <http://dx.doi.org/10.1098/rsos.150571>

109 Минглибаев М.Дж. Кошербаева А.Б. Equations of planetary systems motion //Известия НАН РК, серия физико-математическая, - 2020. - Vol. 6. - P. 53-60.

110 Minglibayev M.Zh., Kosherbaeva A.B. Equations of planetary systems motion //News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical series, - 2020. - Vol. 6, № 334 - P. 53 - 60. <https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.97>

111 Минглибаев М.Дж. О канонической теории возмущений в небесной механике тел переменной массы. //Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата, 1992. - 71-78 с.

112 Perryman M. The exoplanet handbook. - Cambridge: Cambridge university press, 2011. - 410 p.

113 Kitchin C. Exoplanets Finding, Exploring, and Understanding. - New York : Alien Worlds, 2012. - 298 p.

114 Murray C.D., Dermott S.F. Solar System Dynamics. - Cambridge: Cambridge University Press, 2000. - 588 p. ISBN: 9781139174817. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139174817>

115 О представлении общего решения задачи трех тел сходящимися рядами /Мерман Г. А.; ИТА АН СССР, 1958. Т.6. № 10. 713 с.

116 Crossfield Ian J. M., et al. A Nearby M Star with Three Transiting Super-Earths Discovered by K2 //The Astrophysical Journal, - 2015. - Vol. 804, № 1. - P. 1-8. doi: 10.1088/0004-637X/804/1/10

117 Diamond-Lowe H., et al. The K2-3 System Revisited: Testing Photoevaporation and Core-powered Mass Loss with Three Small Planets Spanning the Radius Valley //The Astronomical Journal, - 2022. - Vol. 164, № 5. - P. 1-15. doi: 10.3847/1538-3881/ac7807

118 Damasso M., et al. Eyes on K2-3: A system of three likely sub-Neptunes characterized with HARPS-N and HARPS //Astronomy & Astrophysics, - 2018. - Vol. 615, № A69. - P. 1-14. doi: 10.1051/0004-6361/201732459

119 Crossfield Ian J.M., et al. 197 Candidates and 104 Validated Planets in K2's First Five Fields //The Astrophysical Journal Supplement Series, - 2016. - Vol. 226, № 1, - P. 1-20. doi:10.3847/0067-0049/226/1/7

120 Kosiarek M.R., et al. Bright Opportunities for Atmospheric Characterization of Small Planets: Masses and Radii of K2-3 b, c, and d and GJ3470 b from Radial Velocity Measurements and Spitzer Transits //The Astronomical Journal, - 2019. - Vol. 157, № 3. - P. 13. doi: 10.3847/1538-3881/aaf79c

121 Bonomo A. S., et.al. Cold Jupiters and improved masses in 38 Kepler and K2 small planet systems from 3661 HARPS-N radial velocities. No excess of cold Jupiters in small planet systems //Astronomy & Astrophysics, - 2023. - Vol. 677, № A33. - P. 1-18. doi: 10.1051/0004-6361/202346211

- 122 Almenara J.M., et al. A HARPS view on K2-3 //Astronomy & Astrophysics, - 2015. - Vol. 581, № L7. - P. 1-6. doi: 10.1051/0004-6361/201525918
- 123 Grimm S.L., et al. The nature of the TRAPPIST-1 exoplanets. // Astronomy & Astrophysics, - 2018. doi:10.1051/0004-6361/201732233
- 124 Kral Q., Wyatt M.C., Triaud A.H.M.J. , Marino S., Thebault P., Shorttle O. Cometary impactors on the TRAPPIST-1 planets can destroy all planetary atmospheres and rebuild secondary atmospheres on planets f, g, h. //Mon. Not. R. Astron. Soc., - 2018. - Vol. 000. - P. 1–28. doi:10.1093/mnras/sty1677
- 125 TRAPPIST-1, url: <http://www.trappist.one/#system>
- 126 Gillon M., et al. Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1 //Nature, - 2017. - Vol. 542. - P. 456-460. doi: 10.1038/nature21360
- 127 Gillon M., et al. Temperate Earth-sized planets transiting a nearby ultracool dwarf star //Nature, - 2016. - Vol. 533, № 7602. - P. 221-224. doi: 10.1038/nature17448
- 128 Ваш гид в мире космоса, url: <https://spacegid.com/zvezda-trappist-1-i-ee-planetyi.html>
- 129 Agol E., et al. Refining the Transit-timing and Photometric Analysis of TRAPPIST-1: Masses, Radii, Densities, Dynamics, and Ephemerides //The Planetary Science Journal, - 2021. - Vol. 2, № 1. doi:10.3847/PSJ/abd022 url: <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/PSJ/abd022>
- 130 Luger R., et. al. A seven-planet resonant chain in TRAPPIST-1 //Nature Astronomy, - 2017. - Vol. 0129. doi: 10.1038/s41550-017-0129
- 131 TRAPPIST-1 - или планета нашего будущего, url: https://pikabu.ru/story/trappist1__ili_planeta_nashego_budushchego_5143519
- 132 Система Trappist-1, url: <https://zen.yandex.ru/media/skybody/sistema-trappist1-5b2b553a68629d00a93fbac0>
- 133 Система звезды ТРАППИСТ-1, url: <https://prokoscмос.ru/planetarnye-sistemy/trappist-1/solnechnaya-sistema-trappist-1/>
- 134 Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N., Kosherbayeva A.B. Secular evolution of circumbinary 2-planet systems with isotropically varying masses //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, - 2024. - Vol. 530. - P. 2156–2165. <https://doi.org/10.1093/mnras/stae1015>.

ҚОСЫМША А

Ішкі планеталардың әсерін сипаттайтын ұйытқытушы функция үшін $\frac{1}{\Delta_{is}} =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{A\theta_{i,s}}{2} + \cos[\lambda_i - \lambda_s] A1_{i,s} + \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] A2_{i,s} + \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] A3_{i,s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_i^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} + \\
 & \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] p_i^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] p_i q_i B\theta_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_i^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] q_i^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} - \\
 & \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 B\theta_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{3a_i \gamma_i \eta_i^2 B\theta_{i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
 & \frac{\cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i^2 B\theta_{i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\sin[2\lambda_i - \lambda_s] \eta_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3\sin[\lambda_s] \eta_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i B\theta_{i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \\
 & \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_s^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] p_s^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] p_s q_s B\theta_{i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_s^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} - \\
 & \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] q_s^2 B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s^2 B\theta_{i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_s} - \\
 & \frac{3a_s \gamma_s \eta_s^2 B\theta_{i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B\theta_{i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3\sin[\lambda_i] \eta_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \\
 & \frac{\sin[\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B\theta_{i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_i p_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] p_i p_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] p_s q_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
 & \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] p_s q_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] p_i q_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] p_i q_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_i q_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
 & \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] q_i q_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9\eta_i \eta_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\cos[2\lambda_i] \eta_i \eta_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \eta_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
 & \frac{3\cos[2\lambda_s] \eta_i \eta_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3\sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \xi_i B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i \xi_i B\theta_{i,s}}{8\Lambda_i} - \\
 & \frac{\sin[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B\theta_{i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_s] \xi_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\cos[\lambda_s] \xi_i B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[\lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i B\theta_{i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \\
 & \frac{3\sin[2\lambda_i] \eta_s \xi_i B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s \xi_i B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[2\lambda_s] \eta_s \xi_i B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 B\theta_{i,s}}{4\Lambda_i} + \\
 & \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_i} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_i^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{3a_i \gamma_i \xi_i^2 B\theta_{i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i^2 B\theta_{i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \\
 & \frac{3\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_s B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s \xi_s B\theta_{i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\sin[2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B\theta_{i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
 & \frac{3\cos[\lambda_i] \xi_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s B\theta_{i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B\theta_{i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
 & \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9\xi_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3\cos[2\lambda_i] \xi_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
 & \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3\cos[2\lambda_s] \xi_i \xi_s B\theta_{i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_s} - \\
 & \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_s^2 B\theta_{i,s}}{4\Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_s^2 B\theta_{i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{3a_s \gamma_s \xi_s^2 B\theta_{i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B\theta_{i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{p_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} + \\
 & \frac{\cos[2\lambda_i] p_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_s] p_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[2\lambda_i] p_i q_i B1_{i,s}}{4\Lambda_i} - \\
 & \frac{\sin[2\lambda_s] p_i q_i B1_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{q_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i] q_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] q_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_s] q_i^2 B1_{i,s}}{8\Lambda_i} - \\
 & \frac{\eta_i^2 B1_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i] \eta_i^2 B1_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 B1_{i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{3\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 B1_{i,s}}{16\Lambda_i} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos[2\lambda_s] \eta_i^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\sin[\lambda_i] \eta_i B_{1i,s}}{2\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\sin[\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \\
& \frac{\sin[2\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{1i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{1i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{p_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_i] p_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_s] p_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\sin[2\lambda_i] p_s q_s B_{1i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\sin[2\lambda_s] p_s q_s B_{1i,s}}{4\Lambda_s} - \\
& \frac{q_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_i] q_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] q_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_s] q_s^2 B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\eta_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] \eta_s^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_s] \eta_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{1i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{1i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{1i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{\sin[2\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[2\lambda_i - \lambda_s] \eta_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_s] \eta_s B_{1i,s}}{2\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_s B_{1i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B_{1i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{p_i p_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[2\lambda_i] p_i p_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_i p_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_s] p_i p_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2\lambda_i] p_s q_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_s q_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2\lambda_s] p_s q_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[2\lambda_i] p_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2\lambda_s] p_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{q_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] q_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] q_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_s] q_i q_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{19\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_i B_{1i,s}}{2\Lambda_i} - \frac{3\sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{1i,s}}{8\Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{1i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{1i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{1i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i] \xi_i B_{1i,s}}{2\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\cos[\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{1i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{1i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s \xi_i B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\xi_i^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_i} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] \xi_i^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_i} + \frac{3\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_s] \xi_i^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[2\lambda_i] \eta_s \xi_s B_{1i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{3\sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{1i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\sin[2\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{1i,s}}{2\Lambda_s} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{1i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{1i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i - \lambda_s] \xi_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[\lambda_s] \xi_s B_{1i,s}}{2\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i] a_s \gamma_s \xi_s B_{1i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B_{1i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{19\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_i \xi_s B_{1i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_i \xi_s B_{1i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\xi_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_i] \xi_s^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_s} + \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s^2 B_{1i,s}}{16\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_s] \xi_s^2 B_{1i,s}}{4\Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{1i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{1i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{1i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] p_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] p_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] p_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] p_i q_i B_{2i,s}}{4\Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] p_i q_i B_{2i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] q_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] q_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] q_i^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{4\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{3\sin[2\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[4\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3\sin[2\lambda_i - \lambda_s] \eta_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[\lambda_s] \eta_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{2i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{2i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] p_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] p_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] p_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] p_s q_s B_{2i,s}}{4\Lambda_s} - \\
& \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] p_s q_s B_{2i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] q_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] q_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] q_s^2 B_{2i,s}}{8\Lambda_s} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s^2 B_{2i,s}}{16\Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{2i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{2i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{2i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i] \eta_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[3\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3\sin[\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\sin[3\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[2\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B_{2i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[2\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B_{2i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] p_i p_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] p_i p_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] p_i p_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] p_i p_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] p_s q_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] p_s q_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] p_s q_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] p_s q_i B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] p_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] p_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] p_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] p_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] q_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] q_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] q_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] q_i q_s B_{2i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_s}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[2\lambda_s] \eta_i \eta_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{8 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{\sin[2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[4\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - \lambda_s] \xi_i B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[\lambda_s] \xi_i B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{2i,s}}{2 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{2i,s}}{2 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3 \sin[2\lambda_i] \eta_s \xi_i B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{4 \Lambda_i} + \\
& \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{4 \Lambda_i} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_i^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \\
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{8 \Lambda_s} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{8 \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{\sin[2\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i] \xi_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B_{2i,s}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B_{2i,s}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{4 \Lambda_s} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{4 \Lambda_s} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_s^2 B_{2i,s}}{16 \Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] p_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] p_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] p_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] p_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] p_i q_i B_{3i,s}}{4 \Lambda_i} - \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] p_i q_i B_{3i,s}}{4 \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] q_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] q_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] q_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] q_i^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{4 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{4 \Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3 \cos[2 \lambda_s] \eta_i^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[5 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \sin[3 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[5 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 2 \lambda_s] \eta_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3 \sin[3 \lambda_i - 2 \lambda_s] \eta_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\sin[2 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{3i,s}}{2 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \\
& \frac{\sin[4 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i B_{3i,s}}{2 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} + \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} + \frac{\sin[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_s q_s B_{3i,s}}{4 \Lambda_s} - \\
& \frac{\sin[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_s q_s B_{3i,s}}{4 \Lambda_s} - \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] q_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] q_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] q_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] q_s^2 B_{3i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2 \lambda_i] \eta_s^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \cos[4 \lambda_i - 6 \lambda_s] \eta_s^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_s^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_s^2 B_{3i,s}}{4 \Lambda_s} - \\
& \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] \eta_s^2 B_{3i,s}}{4 \Lambda_s} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] \eta_s^2 B_{3i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{\cos[3 \lambda_i - 5 \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{3i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{3i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 B_{3i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{\sin[4 \lambda_i - 5 \lambda_s] \eta_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[2 \lambda_i - 3 \lambda_s] \eta_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[4 \lambda_i - 3 \lambda_s] \eta_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[2 \lambda_i - \lambda_s] \eta_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[3 \lambda_i - 4 \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B_{3i,s}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[3 \lambda_i - 2 \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s B_{3i,s}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_i p_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_i p_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_i p_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_i p_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{\sin[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_s q_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_s q_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_s q_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\sin[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_s q_i B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] p_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{\sin[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] p_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] q_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[4 \lambda_i - 4 \lambda_s] q_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_s] q_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_s] q_i q_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[3 \lambda_i - 5 \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[5 \lambda_i - 5 \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[\lambda_i - 3 \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{9 \cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[5 \lambda_i - 3 \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[3 \lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s B_{3i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[2 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{3 \sin[6 \lambda_i - 4 \lambda_s] \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{8 \Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{8\Lambda_i} - \frac{3 \sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{8\Lambda_i} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{3i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[5\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{3i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i B_{3i,s}}{2a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{4\Lambda_i} + \\
& \frac{3 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{4\Lambda_i} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_i} + \frac{3 \cos[2\lambda_s] \xi_i^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_i} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{\cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_i] \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{3 \sin[4\lambda_i - 6\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{8\Lambda_s} - \\
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{8\Lambda_s} + \frac{\sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s B_{3i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 5\lambda_s] \xi_s B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_s] \xi_s B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B_{3i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s B_{3i,s}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{\sin[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[5\lambda_i - 5\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_i \xi_s B_{3i,s}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[2\lambda_i] \xi_s^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_s} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_s] \xi_s^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s^2 B_{3i,s}}{4\Lambda_s} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s^2 B_{3i,s}}{4\Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s^2 B_{3i,s}}{16\Lambda_s} + \frac{\cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{3i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{3i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 B_{3i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{15 \eta_i^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_i} + \frac{9 \cos[2\lambda_i] \eta_i^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_i} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 C_{0i,s}}{32\Lambda_i} - \frac{27 \cos[2\lambda_s] \eta_i^2 C_{0i,s}}{32\Lambda_i} + \frac{3 a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{0i,s}}{8a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{0i,s}}{8a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,s}}{4a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,s}}{8a_s \gamma_s \Lambda_i} + \\
& \frac{15 \eta_s^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{27 \cos[2\lambda_i] \eta_s^2 C_{0i,s}}{32\Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s^2 C_{0i,s}}{32\Lambda_s} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_s} + \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_s] \eta_s^2 C_{0i,s}}{16\Lambda_s} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{0i,s}}{8a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{0i,s}}{4a_i \gamma_i \Lambda_s} +
\end{aligned}$$

[illegible]

[illegible]

$$\begin{aligned}
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_i C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_i C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{27 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_i} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{16 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_i} + \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{16 \Lambda_i} - \\
& \frac{15 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_i^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,s}}{4 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} + \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \frac{3 a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{15 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} - \\
& \frac{27 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{9 \sin[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{9 \sin[2\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3 \sin[2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{2 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \frac{33 \sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{15 \sin[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{33 \sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{9 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{21 \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{33 \cos[2\lambda_i] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{2 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{33 \cos[2\lambda_s] \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \xi_s C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_s} - \frac{15 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_s} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{27 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_s} + \\
& \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \xi_s^2 C_{1,i,s}}{32 \Lambda_s} - \frac{3 a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{1,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{1,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{1,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{1,i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{1,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \frac{9 \eta_i^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{15 \cos[2\lambda_i] \eta_i^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{27 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{32 \Lambda_i} - \frac{9 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{32 \Lambda_i} + \\
& \frac{15 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[2\lambda_s] \eta_i^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_i} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,s}}{4 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} + \\
& \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\
& \frac{9 \eta_s^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{9 \cos[2\lambda_i] \eta_s^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{32 \Lambda_s} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_s} - \\
& \frac{9 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{15 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 \Lambda_s} - \frac{27 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{32 \Lambda_s} - \\
& \frac{15 \cos[2\lambda_s] \eta_s^2 C_{2i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{2i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{2i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{21 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{21 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{2 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{21 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_i \eta_s C_{2i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\
& \frac{15 \sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{8 \Lambda_i} + \frac{27 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{3 \sin[6\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{16 \Lambda_i} + \\
& \frac{9 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{8 \Lambda_i} + \frac{9 \sin[2\lambda_s] \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{8 \Lambda_i} - \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \frac{9 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \\
& \frac{9 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{9 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{3 \sin[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{21 \sin[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{33 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\
& \frac{9 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \sin[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{21 \sin[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s \xi_i C_{2i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\ & \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\ & \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[2\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_i \zeta_s C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \\ & \frac{9 \xi_s^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{9 \cos[2\lambda_i] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{32 \Lambda_s} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_s} - \\ & \frac{9 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{15 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 \Lambda_s} + \frac{27 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{32 \Lambda_s} + \\ & \frac{15 \cos[2\lambda_s] \xi_s^2 C_{2,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \\ & \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{2,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \\ & \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{2,i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \frac{27 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_i} - \frac{9 \cos[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_i} - \\ & \frac{3 \cos[7\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_i} + \frac{15 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 \Lambda_i} + \\ & \frac{9 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{9 \cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_i} - \frac{27 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_i} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_i^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{3,i,s}}{4 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} - \\ & \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s^2 \gamma_s^2 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\ & \frac{3 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{4 a_s \gamma_s \Lambda_i} + \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \\ & \frac{3 \cos[2\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \Lambda_i} - \frac{3 \cos[5\lambda_i - 7\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_s} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_s} - \\ & \frac{9 \cos[5\lambda_i - 5\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_s} - \frac{27 \cos[\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_s} + \frac{15 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 \Lambda_s} - \\ & \frac{27 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_s} - \frac{9 \cos[\lambda_i - \lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_s} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{16 \Lambda_s} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_s] \eta_s^2 C_{3,i,s}}{32 \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\ & \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} + \\ & \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] a_s \gamma_s \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{3,i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} - \\ & \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \eta_s^2 C_{3,i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[2\lambda_i] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{9 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\ & \frac{3 \cos[6\lambda_i - 6\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{21 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{21 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\ & \frac{9 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{21 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{21 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \\ & \frac{9 \cos[2\lambda_s] \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \frac{3 \cos[5\lambda_i - 5\lambda_s] a_i \gamma_i \eta_i \eta_s C_{3,i,s}}{8 a_s \gamma_s \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_s}} + \end{aligned}$$

[illegible]

[illegible]

$$\frac{3 \cos [4 \lambda_i - 4 \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{3i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{3 \cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{3i,s}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_s} - \frac{9 \cos [4 \lambda_i - 2 \lambda_s] a_s \gamma_s \xi_s^2 C_{3i,s}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_s} +$$

$$\frac{3 \cos [3 \lambda_i - 5 \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{3i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \cos [3 \lambda_i - 3 \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{3i,s}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s} + \frac{3 \cos [3 \lambda_i - \lambda_s] a_s^2 \gamma_s^2 \xi_s^2 C_{3i,s}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_s}$$

Сыртқы планеталардың әсерін сипаттайтын ұйытқытушы функция үшін $\frac{1}{\Delta_{ik}} =$

$$\begin{aligned} & \frac{A_{0i,k}}{2} + \cos [\lambda_i - \lambda_k] A_{1i,k} + \cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] A_{2i,k} + \cos [3 \lambda_i - 3 \lambda_k] A_{3i,k} - \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] p_i^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} + \\ & \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] p_i^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] p_i q_i B_{0i,k}}{4 \Lambda_i} - \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] q_i^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] q_i^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} - \\ & \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 B_{0i,k}}{4 \Lambda_i} - \frac{3 \cos [3 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] \eta_i^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{3 a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{0i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\ & \frac{\cos [2 \lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{0i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{\sin [2 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3 \sin [\lambda_k] \eta_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin [\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i B_{0i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} - \\ & \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] p_k^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} + \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] p_k^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] p_k q_k B_{0i,k}}{4 \Lambda_k} - \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] q_k^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} - \\ & \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] q_k^2 B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{3 \cos [3 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_k^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] \eta_k^2 B_{0i,k}}{4 \Lambda_k} - \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] \eta_k^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_k} - \\ & \frac{3 a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{0i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{\cos [2 \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{0i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3 \sin [\lambda_i] \eta_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin [\lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} - \\ & \frac{\sin [\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{0i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] p_i p_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] p_i p_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin [\lambda_i - \lambda_k] p_k q_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\ & \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] p_k q_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin [\lambda_i - \lambda_k] p_i q_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] p_i q_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] q_i q_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\ & \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] q_i q_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{9 \eta_i \eta_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos [2 \lambda_i] \eta_i \eta_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\ & \frac{3 \cos [2 \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \sin [3 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_i B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \xi_i B_{0i,k}}{8 \Lambda_i} - \\ & \frac{\sin [2 \lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{0i,k}}{4 a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{\cos [2 \lambda_i - \lambda_k] \xi_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3 \cos [\lambda_k] \xi_i B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos [\lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i B_{0i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \\ & \frac{3 \sin [2 \lambda_i] \eta_k \xi_i B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin [2 \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 B_{0i,k}}{4 \Lambda_i} + \\ & \frac{3 \cos [3 \lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_i} + \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] \xi_i^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{3 a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{0i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{\cos [2 \lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{0i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} + \\ & \frac{3 \sin [\lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_k \xi_k B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\sin [\lambda_i + \lambda_k] \eta_k \xi_k B_{0i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\sin [2 \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{0i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \\ & \frac{3 \cos [\lambda_i] \xi_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos [\lambda_i - 2 \lambda_k] \xi_k B_{0i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos [\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{0i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin [2 \lambda_i] \eta_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\ & \frac{\sin [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin [2 \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{9 \xi_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \cos [2 \lambda_i] \xi_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\ & \frac{\cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \cos [2 \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{0i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos [\lambda_i - 3 \lambda_k] \xi_k^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_k} - \\ & \frac{\cos [\lambda_i - \lambda_k] \xi_k^2 B_{0i,k}}{4 \Lambda_k} + \frac{\cos [\lambda_i + \lambda_k] \xi_k^2 B_{0i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{3 a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{0i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\cos [2 \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{0i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{p_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} + \\ & \frac{\cos [2 \lambda_i] p_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] p_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} + \frac{\cos [2 \lambda_k] p_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\sin [2 \lambda_i] p_i q_i B_{1i,k}}{4 \Lambda_i} - \\ & \frac{\sin [2 \lambda_k] p_i q_i B_{1i,k}}{4 \Lambda_i} - \frac{q_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos [2 \lambda_i] q_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos [2 \lambda_i - 2 \lambda_k] q_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos [2 \lambda_k] q_i^2 B_{1i,k}}{8 \Lambda_i} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} - \frac{\cos[2\lambda_i] \eta_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \\ & \frac{\cos[2\lambda_k] \eta_i^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\ & \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{\sin[\lambda_i] \eta_i B_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Delta_i}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i}} - \\ & \frac{\sin[2\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{1,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i}} - \frac{\sin[\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{1,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i}} - \frac{p_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} + \frac{\cos[2\lambda_i] p_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \\ & \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} + \frac{\cos[2\lambda_k] p_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\sin[2\lambda_i] p_k q_k B_{1,i,k}}{4 \Delta_k} - \frac{\sin[2\lambda_k] p_k q_k B_{1,i,k}}{4 \Delta_k} - \\ & \frac{q_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\cos[2\lambda_i] q_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] q_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\cos[2\lambda_k] q_k^2 B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\eta_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_k} - \\ & \frac{\cos[2\lambda_i] \eta_k^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_k} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_k} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_k} - \frac{\cos[2\lambda_k] \eta_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_k} - \\ & \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} + \\ & \frac{\sin[2\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[2\lambda_i - \lambda_k] \eta_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[\lambda_k] \eta_k B_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\sin[\lambda_i] a_k \gamma_k \eta_k B_{1,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{\sin[\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{1,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_k}} + \frac{p_i p_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\cos[2\lambda_i] p_i p_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_i p_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\ & \frac{\cos[2\lambda_k] p_i p_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[2\lambda_i] p_k q_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_k q_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[2\lambda_k] p_k q_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{\sin[2\lambda_i] p_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[2\lambda_k] p_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{q_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{\cos[2\lambda_i] q_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] q_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\cos[2\lambda_k] q_i q_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{19 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_i B_{1,i,k}}{2 \Delta_i} - \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{1,i,k}}{8 \Delta_i} - \\ & \frac{\sin[2\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{1,i,k}}{8 \Delta_i} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\ & \frac{\cos[\lambda_i] \xi_i B_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Delta_i}} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i}} + \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{1,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i}} + \\ & \frac{\cos[\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{1,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\xi_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} + \\ & \frac{\cos[2\lambda_i] \xi_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i^2 B_{1,i,k}}{4 \Delta_i} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_i} + \frac{\cos[2\lambda_k] \xi_i^2 B_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\ & \frac{\sin[2\lambda_i] \eta_k \xi_k B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} + \frac{3 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{1,i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{\sin[2\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{1,i,k}}{2 \Delta_k} + \\ & \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{\sin[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_k}} - \\ & \frac{3 \cos[2\lambda_i - \lambda_k] \xi_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Delta_k}} - \frac{\cos[\lambda_k] \xi_k B_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\cos[\lambda_i] a_k \gamma_k \xi_k B_{1,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{1,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_k}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3 \sin[\lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3 \sin[3 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{19 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \cos[3 \lambda_i - \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{1,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\xi_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Lambda_k} + \frac{\cos[2 \lambda_i] \xi_k^2 B_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} + \frac{3 \cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_k] \xi_k^2 B_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_k] \xi_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Lambda_k} + \frac{\cos[2 \lambda_k] \xi_k^2 B_{1,i,k}}{4 \Lambda_k} + \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] p_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] p_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} + \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] p_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} + \frac{\sin[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_i q_i B_{2,i,k}}{4 \Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[3 \lambda_i - \lambda_k] p_i q_i B_{2,i,k}}{4 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] q_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] q_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] q_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] q_i^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{4 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[5 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{4 \Lambda_i} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{\cos[4 \lambda_i - 2 \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{\cos[2 \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{2,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \sin[2 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[4 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3 \sin[2 \lambda_i - \lambda_k] \eta_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[\lambda_k] \eta_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 2 \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{2,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[3 \lambda_i - 2 \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{2,i,k}}{2 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] p_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] p_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} + \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] p_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} + \frac{\sin[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_k q_k B_{2,i,k}}{4 \Lambda_k} - \\
& \frac{\sin[3 \lambda_i - \lambda_k] p_k q_k B_{2,i,k}}{4 \Lambda_k} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] q_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] q_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] q_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] q_k^2 B_{2,i,k}}{8 \Lambda_k} - \frac{3 \cos[3 \lambda_i - 5 \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{4 \Lambda_k} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{4 \Lambda_k} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_k^2 B_{2,i,k}}{16 \Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[2 \lambda_i] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{2,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{\cos[2 \lambda_i - 4 \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{2,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{3 \cos[2 \lambda_i - 2 \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{2,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i] \eta_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[3 \lambda_i - 4 \lambda_k] \eta_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[3 \lambda_i - 2 \lambda_k] \eta_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\sin[2 \lambda_i - 3 \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{2,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[2 \lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{2,i,k}}{2 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_i p_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] p_i p_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] p_i p_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos[3 \lambda_i - \lambda_k] p_i p_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_k q_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] p_k q_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] p_k q_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\sin[3 \lambda_i - \lambda_k] p_k q_i B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[\lambda_i - 3 \lambda_k] p_i q_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[3 \lambda_i - 3 \lambda_k] p_i q_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] p_i q_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[3 \lambda_i - \lambda_k] p_i q_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3 \lambda_k] q_i q_k B_{2,i,k}}{4 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] q_i q_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] q_i q_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] q_i q_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{9\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[2\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{3\sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{8\Lambda_i} - \\
& \frac{3\sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{\sin[2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{2i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[4\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\cos[2\lambda_i - \lambda_k] \xi_i B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[\lambda_k] \xi_i B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{2i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{2i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3\sin[2\lambda_i] \eta_k \xi_i B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\sin[2\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{4\Lambda_i} + \\
& \frac{3\cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{4\Lambda_i} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_i} + \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_k] \xi_i^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{\cos[2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{2i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} + \\
& \frac{3\sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{8\Lambda_k} - \\
& \frac{3\sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{\sin[2\lambda_i] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{2i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i] \xi_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{2i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{2i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\sin[2\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[2\lambda_i] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{9\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{2i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i}\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_k} + \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{4\Lambda_k} - \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{4\Lambda_k} + \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_k} + \frac{3\cos[\lambda_i + \lambda_k] \xi_k^2 B_{2i,k}}{16\Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{2i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{2i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{2i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] p_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_i q_i B_{3i,k}}{4\Lambda_i} - \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_i q_i B_{3i,k}}{4\Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] q_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] q_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] q_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] q_i^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[6\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[2\lambda_k] \eta_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{\cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 B_{3i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3\sin[3\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{\sin[5\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\sin[\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{3\sin[3\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{3i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} - \\
& \frac{\sin[4\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i B_{3i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] p_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_k q_k B_{3i,k}}{4\Lambda_k} - \\
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_k q_k B_{3i,k}}{4\Lambda_k} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] q_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] q_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] q_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] q_k^2 B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \frac{3\cos[2\lambda_i] \eta_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} - \\
& \frac{3\cos[4\lambda_i - 6\lambda_k] \eta_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_k} - \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{\cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{3i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} - \\
& \frac{3\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{3i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 B_{3i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{\sin[4\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\sin[2\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[4\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[2\lambda_i - \lambda_k] \eta_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\sin[3\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{3i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[3\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k B_{3i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_i p_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] p_i p_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_i p_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_i p_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_k q_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] p_k q_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_k q_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_k q_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] p_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] p_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{\sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] p_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] p_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] q_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] q_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] q_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] q_i q_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[5\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{9\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{3\sin[6\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{8\Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{8\Lambda_i} - \frac{3\sin[2\lambda_k] \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{8\Lambda_i} + \frac{\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{\sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i B_{3i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[5\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{3i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i B_{3i,k}}{2a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i}} - \frac{3\sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[5\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_i} + \\
& \frac{3\cos[6\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_i} + \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} + \frac{3\cos[2\lambda_k] \xi_i^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_i} + \\
& \frac{\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{\cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 B_{3i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{3\sin[2\lambda_i] \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{3\sin[4\lambda_i - 6\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{\sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{8\Lambda_k} - \\
& \frac{\sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{8\Lambda_k} + \frac{\sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{\sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k B_{3i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 5\lambda_k] \xi_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[4\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - \lambda_k] \xi_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{3i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[3\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k B_{3i,k}}{2a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{\sin[5\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3\sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\sin[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[5\lambda_i - 5\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{9\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{4\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3\cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{\cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_k] \xi_i \xi_k B_{3i,k}}{8\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3\cos[2\lambda_i] \xi_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} + \frac{3\cos[4\lambda_i - 6\lambda_k] \xi_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{\cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_k^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_k} - \frac{\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_k^2 B_{3i,k}}{4\Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_k^2 B_{3i,k}}{16\Lambda_k} + \frac{\cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{3i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{3\cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{3i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{\cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 B_{3i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{15\eta_i^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_i} + \frac{9\cos[2\lambda_i] \eta_i^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_i} - \frac{9\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 C_{0i,k}}{32\Lambda_i} - \frac{27\cos[2\lambda_k] \eta_i^2 C_{0i,k}}{32\Lambda_i} + \frac{3a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{0i,k}}{8a_k^2 \gamma_k^2 \Lambda_i} - \frac{3\cos[2\lambda_i] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{0i,k}}{8a_k^2 \gamma_k^2 \Lambda_i} - \\
& \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,k}}{4a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3\cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{9\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{0i,k}}{8a_k \gamma_k \Lambda_i} + \\
& \frac{15\eta_k^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{27\cos[2\lambda_i] \eta_k^2 C_{0i,k}}{32\Lambda_k} - \frac{3\cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 C_{0i,k}}{32\Lambda_k} - \frac{9\cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_k} + \\
& \frac{9\cos[2\lambda_k] \eta_k^2 C_{0i,k}}{16\Lambda_k} - \frac{3\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{0i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{3\cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{0i,k}}{4a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{9\cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{0i,k}}{8a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{0i,k}}{8a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} - \frac{3\cos[2\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{0i,k}}{8a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} + \frac{9\cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{0i,k}}{16\sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} +
\end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned} & \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_k^2 C_{0,i,k}}{16 \Delta_k} - \frac{9 \cos[2\lambda_k] \xi_k^2 C_{0,i,k}}{16 \Delta_k} + \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{0,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{0,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{0,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{3 a_k^2 \gamma_k^2 \xi_k^2 C_{0,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} + \frac{3 \cos[2\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \xi_k^2 C_{0,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} \\ & \frac{27 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_i} - \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_i} + \\ & \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} + \frac{15 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_i} - \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_i} + \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \\ & \frac{3 a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\ & \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{9 \cos[2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_k} + \\ & \frac{15 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_k} - \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{16 \Delta_k} + \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{16 \Delta_k} - \\ & \frac{27 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_k} - \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Delta_k} - \frac{3 a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \\ & \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{3 \cos[2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} + \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} + \\ & \frac{21 \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{33 \cos[2\lambda_i] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{33 \cos[2\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{27 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} + \\ & \frac{15 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{9 \sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \\ & \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} + \frac{3 \sin[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{2 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} + \\ & \frac{9 \sin[2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{33 \sin[2\lambda_i] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{9 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{15 \sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\ & \frac{33 \sin[2\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\ & \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\ & \frac{9 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_i C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{27 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_i} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{16 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_i} + \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{16 \Lambda_i} - \\
& \frac{15 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_i} + \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \xi_i^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Lambda_i} + \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Lambda_i} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \xi_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Lambda_i} - \frac{3 a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} - \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i^2 C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \Lambda_i} + \frac{3 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{15 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} - \\
& \frac{27 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} - \frac{9 \sin[\lambda_i + \lambda_k] \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} + \frac{9 \sin[2\lambda_i] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3 \sin[2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{2 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} - \frac{33 \sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{9 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3 \sin[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{15 \sin[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{9 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{33 \sin[2\lambda_k] \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{9 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{9 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \sin[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{21 \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{33 \cos[2\lambda_i] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{2 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{33 \cos[2\lambda_k] \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{16 \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_k \gamma_k \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \frac{15 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \xi_i \xi_k C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Lambda_i} \sqrt{\Lambda_k}} + \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_k} - \frac{15 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_k} - \\
& \frac{9 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} + \frac{21 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{16 \Lambda_k} + \frac{27 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_k} + \\
& \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \xi_k^2 C_{1,i,k}}{32 \Lambda_k} - \frac{3 a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} - \frac{3 \cos[2\lambda_k] a_k \gamma_k \xi_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i \gamma_i \Lambda_k} + \frac{3 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \xi_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \xi_k^2 C_{1,i,k}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} + \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \xi_k^2 C_{1,i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Lambda_k} - \frac{9 \eta_i^2 C_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} - \frac{15 \cos[2\lambda_i] \eta_i^2 C_{2,i,k}}{16 \Lambda_i} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{27 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{32 \Delta_i} - \frac{9 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \cos[6\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{32 \Delta_i} + \\
& \frac{15 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 \Delta_i} + \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_i} + \frac{9 \cos[2\lambda_k] \eta_i^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_i} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \frac{3 \cos[2\lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} + \\
& \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i^2 C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \Delta_i} - \\
& \frac{9 \eta_k^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_k} + \frac{9 \cos[2\lambda_i] \eta_k^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_k} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 6\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{32 \Delta_k} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_k} - \\
& \frac{9 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_k} + \frac{15 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 \Delta_k} - \frac{27 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{32 \Delta_k} - \\
& \frac{15 \cos[2\lambda_k] \eta_k^2 C_{2i,k}}{16 \Delta_k} - \frac{3 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{9 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \\
& \frac{3 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{4 a_i \gamma_i \Delta_k} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i + \lambda_k] a_k \gamma_k \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \Delta_k} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{2i,k}}{8 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} + \\
& \frac{3 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_k^2 \gamma_k^2 \eta_k^2 C_{2i,k}}{4 a_i^2 \gamma_i^2 \Delta_k} + \frac{9 \cos[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[5\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\
& \frac{21 \cos[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{21 \cos[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{3 \cos[\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{2 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{21 \cos[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[\lambda_i + \lambda_k] \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{3 a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{3 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{9 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[2\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_k \gamma_k \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_i] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \cos[2\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{3 \cos[4\lambda_i - 4\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\
& \frac{9 \cos[2\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{4 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{3 \cos[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{3 \cos[2\lambda_k] a_k \gamma_k \eta_i \eta_k C_{2i,k}}{8 a_i \gamma_i \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \\
& \frac{15 \sin[2\lambda_i] \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{8 \Delta_i} + \frac{27 \sin[2\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{16 \Delta_i} - \frac{3 \sin[6\lambda_i - 4\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{16 \Delta_i} + \\
& \frac{9 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{8 \Delta_i} + \frac{9 \sin[2\lambda_k] \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{8 \Delta_i} - \frac{3 \sin[4\lambda_i - 2\lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \\
& \frac{3 \sin[2\lambda_k] a_i^2 \gamma_i^2 \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k^2 \gamma_k^2 \Delta_i} - \frac{9 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} + \\
& \frac{9 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{3 \sin[\lambda_i + \lambda_k] a_i \gamma_i \eta_i \xi_i C_{2i,k}}{4 a_k \gamma_k \Delta_i} - \frac{9 \sin[3\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{3 \sin[5\lambda_i - 5\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{21 \sin[\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{33 \sin[3\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \\
& \frac{9 \sin[5\lambda_i - 3\lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{16 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} + \frac{9 \sin[\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{4 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} - \frac{21 \sin[3\lambda_i - \lambda_k] \eta_k \xi_i C_{2i,k}}{8 \sqrt{\Delta_i} \sqrt{\Delta_k}} +
\end{aligned}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]